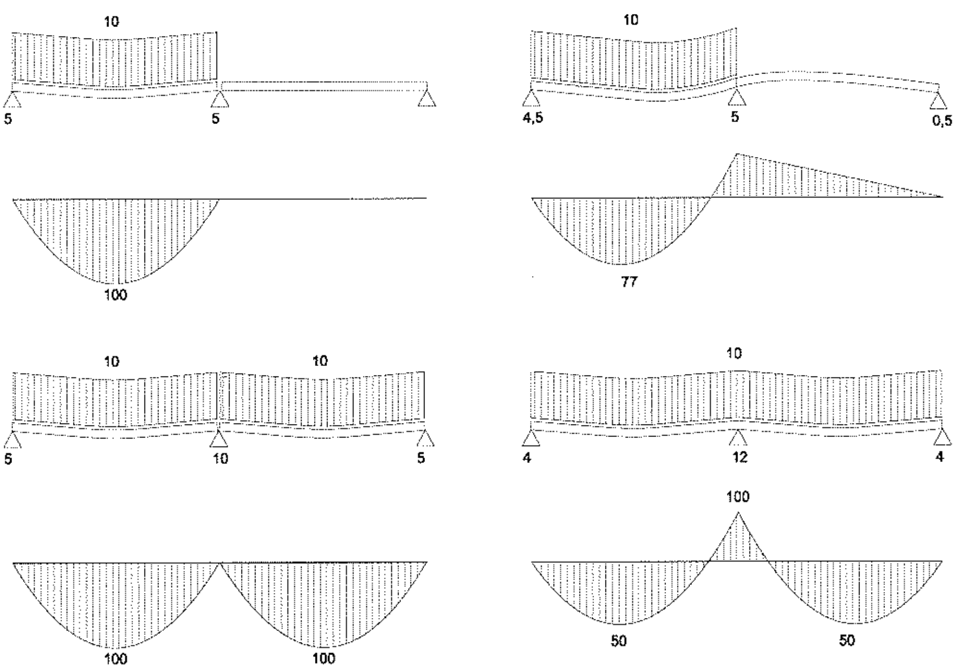
TEMA 07. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

1.CONTINUIDAD

1.1. Introducción

Cuando se trata de proyectar un elemento a flexión sobre varios apoyos consecutivos existe, en general, una ventaja indudable en disponer una viga continua. Ello implica que la deformación tiene que corresponder a una pieza enteriza, con curvatura continua, sin brusquedades. Si se disponen tramos sueltos, cada uno apoyado en sus extremos, el régimen de cada tramo es de momentos POSITIVOS, y la curvatura experimenta un cambio brusco, un *quiebro*, al pasar por el apoyo, ya que cada tramo posee en ese punto una inclinación diferente. No existe la interacción de los diferentes tramos, limitándose estos a compartir el apoyo común, que responde con la suma de reacciones que corresponderían a cada tramo.

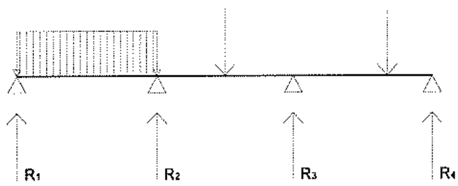
El comportamiento en continuidad permite el funcionamiento en régimen alternante de momentos POSITIVOS y NEGATIVOS, como el que se produce en una viga con voladizos. Cada tramo interacciona con los con los colindantes *pactando una única inclinación* sobre cada apoyo, sin giro relativo entre los dos tramos, respondiendo el apoyo con la reacción que corresponde al régimen de momentos de cada tramo que acomete a él.



Efectos de la continuidad

En la solución en continuidad, con un régimen de momentos positivos y negativos, los provenientes de una nueva carga dada pueden ser menores que en la situación de tramos sueltos, resultando ser válida una pieza de menor sección. En los casos en los que el diseño es por momentos o hay que reducir la flecha, la viga continua la reduce drásticamente, siendo una solución ventajosa al construir en acero u hormigón. En madera, donde el diseño es frecuentemente por cortante no suele haber diferencia entre una u otra solución.

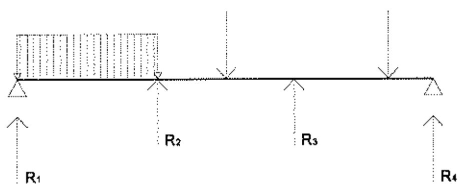
1.2. Hiperestatismo



En una viga continua no pueden obtenerse los esfuerzos a partir de las fuerzas que actúan, ya que para su cálculo necesitamos las reacciones de los apoyos, que no pueden deducirse de las condiciones de equilibrio (ecuaciones de la estática).

$\Sigma V = 0$

$\Sigma M = 0$

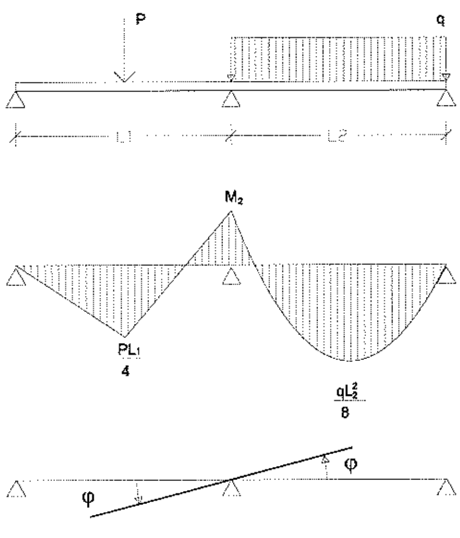


Sistema equivalente: si no existiesen los apoyos intermedios, el sistema sería isostático, y las incongruencias estarían en los puntos 2 y 3, que experimentarían un descenso, luego hay una reacción que se opone a ello. Tenemos dos nuevas condiciones (ecuac. de compatibilidad) que nos permiten resolver la viga.

$\Sigma V = 0 \qquad \delta_2 = 0$

$\Sigma M = 0 \qquad \delta_3 = 0$

2 Cálculo de vigas continuas. MÉTODO DE LA FLEXIBILIDAD

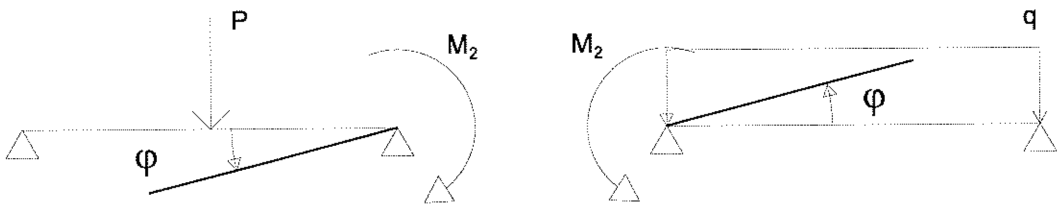


Para el cálculo de vigas continuas es corriente tomar como incógnita los momentos en los apoyos, ya que una vez conocidos, sabemos las leyes que tienen los distintos tipos de cargas.

En este caso nos interesa conocer el valor de M_2, de donde deducimos el resto de los esfuerzos (cortante y axil).

La continuidad obliga a la existencia de un momento sobre el apoyo común, M, que produce un giro en cada viga, siendo el ángulo φ a los lados igual y del mismo sentido.

Para el análisis separamos la viga en sus dos tramos. M_2 es la acción de un tramo sobre el otro:



Giro debido a la carga **P**

$$\varphi_p = +\frac{Pl_1^2}{16EI}$$

Giro debido al momento M_2

$$\varphi_M = -\frac{M_2 l_1}{3EI}$$

Giro debido a la carga **q**

$$\varphi_q = -\frac{Pl_2^3}{24EI}$$

Giro debido al momento M_2

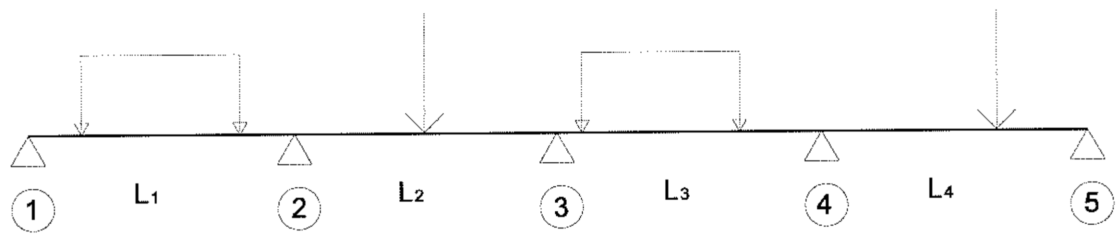
$$\varphi_M = +\frac{M_2 l_2}{3EI}$$

Sabemos los giros producidos por las diferentes solicitaciones, bien hallándolos o a través de las tablas. La coherencia geométrica o *compatibilidad en las deformaciones* obliga a que el giro en un extremo y en otro del apoyo sea el mismo, luego:

$$\varphi_d = \varphi_i \quad \Rightarrow \quad \frac{Pl_1^2}{16EI} - \frac{M_2 l_1}{3EI} = -\frac{ql_2^3}{24EI} + \frac{M_2 l_2}{3EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_2(l_1 + l_2)}{3EI} = \frac{Pl_1^2}{16EI} + \frac{ql_2^3}{24EI}$$

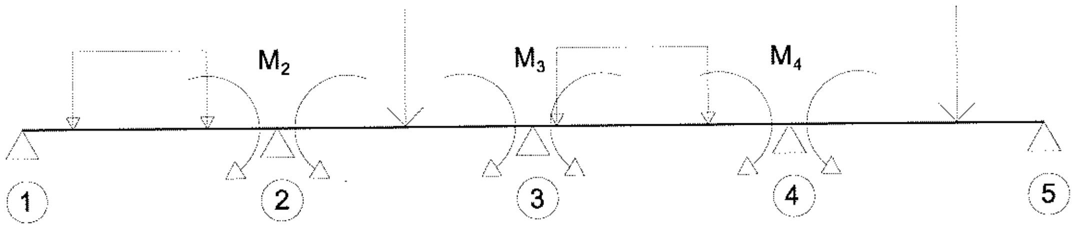
Vemos como en el segundo término nos quedan la suma de los giros producidos por las cargas en el apoyo 2. El primer término son los giros producidos por el momento.

2.2 Cálculo de vigas continuas. GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO



En este caso sabemos que los momentos en **1** y **5** son cero, luego hay que hallarlos en los demás puntos. Hacemos lo mismo que en el caso anterior: separamos la viga en sus tramos y dibujamos los momentos M_i que actúan.

(NOTA: φ_c^i *indica el giro sobre el nudo* ***i*** *producido por la carga correspondiente*)



$$
\begin{array}{cc|ccc|ccc|c}
\varphi_c^1 & & -\varphi_c^2 & & +\varphi_c^2 & -\varphi_c^3 & & \varphi_c^3 & -\varphi_c^4 \\
-\dfrac{M_2 l_1}{3EI} & & \dfrac{M_2 l_2}{3EI} & & -\dfrac{M_3 l_2}{3EI} & \dfrac{M_3 l_3}{3EI} & & -\dfrac{M_3 l_3}{6EI} & \dfrac{M_4 l_4}{3EI} \\
 & & \dfrac{M_3 l_2}{6EI} & & -\dfrac{M_2 l_2}{6EI} & \dfrac{M_4 l_3}{6EI} & & -\dfrac{M_4 l_3}{3EI} &
\end{array}
$$

Tenemos que igualar los giros en los distintos puntos, de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

2. $\varphi_c^1 - \dfrac{M_2 l_1}{3EI} = -\varphi_c^2 + \dfrac{M_2 l_2}{3EI} + \dfrac{M_3 l_2}{6EI}$

3. $\varphi_c^2 - \dfrac{M_2 l_2}{6EI} - \dfrac{M_3 l_2}{3EI} = -\varphi_c^3 + \dfrac{M_3 l_3}{3EI} + \dfrac{M_4 l_3}{6EI}$

4. $\varphi_c^3 - \dfrac{M_3 l_3}{6EI} - \dfrac{M_4 l_3}{3EI} = -\varphi_c^4 + \dfrac{M_4 l_4}{3EI}$

Ordenamos las ecuaciones, en un término los momentos y en el otro los giros:

$$
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{M_2(l_1 + l_2)}{3EI} & + \dfrac{M_3 l_2}{6EI} & & = & \varphi_c^{1+2} \\
\dfrac{M_2 l_2}{6EI} & + \dfrac{M_3(l_2 + l_3)}{3EI} & + \dfrac{M_4 l_3}{6EI} & = & \varphi_c^{2+3} \\
 & \dfrac{M_3 l_3}{6EI} & + \dfrac{M_4(l_3 + l_4)}{3EI} & = & \varphi_c^{3+4}
\end{array}
$$

- las incógnitas que queremos hallar son los distintos momentos M_i
- el término independiente es la suma de los giros debidos a la carga en los nudos

(NOTA: $\sum \varphi_i$: *sumatorio de giros en el nudo i*)

En el caso anterior, si suponemos EI = cte., la matriz del sistema queda:

$$\frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \frac{l_1+l_2}{3} & \frac{l_2}{6} & 0 \\ \frac{l_2}{6} & \frac{l_2+l_3}{3} & \frac{l_3}{6} \\ 0 & \frac{l_3}{6} & \frac{l_3+l_4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \varphi_2 \\ \sum \varphi_3 \\ \sum \varphi_4 \end{pmatrix}$$

2.3 Cálculo de vigas continuas. FORMACIÓN DE LA MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

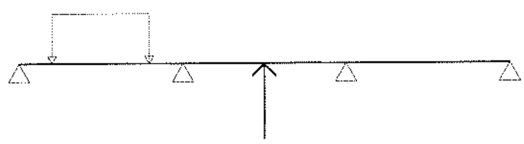
- Es siempre una matriz simétrica
- En la diagonal va la suma de las longitudes de los tramos que afectan al nudo en cuestión dividido entre $3EI$ (Si EI = cte. sale fuera de la matriz)
- Los demás términos por encima de la diagonal son (*recordamos que la matriz es simétrica*)
  - cero, si no influyen entre sí (M_4 sobre el nudo 2)
  - la longitud del tramo en la que ese momento actúa sobre el nudo (*M_3 sobre el nudo dos* $\rightarrow L_2$) dividido entre $6EI$.
- El término independiente es la suma de los giros en cada nudo.

2.4 Cálculo de vigas continuas. OBSERVACIONES SOBRE EL MÉTODO

1. Los giros proporcionados por las cargas son siempre positivos con cargas verticales hacia abajo. Tenemos que son siempre el sumatorio directo en valor absoluto.

   $$\varphi_c^1 + \varphi_c^2 = \varphi^{1+2}$$

   Luego este es un método pensado para cargas VERTICALES. En el caso de una carga dirigida hacia arriba:

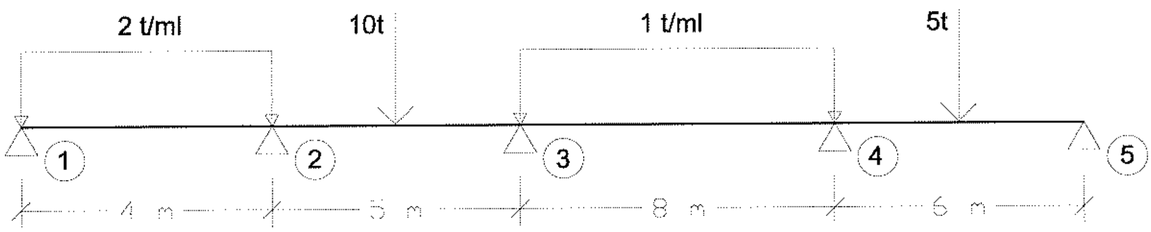
   

   En este caso el giro producido por esa carga se restaría.

2. La ventaja que tenemos con este método es que con la geometría de la viga ya podemos establecer la matriz, y añadir al final el término independiente, que pueden ser varias hipótesis de carga.

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_2 & \sum & \sum \\ \sum_3 & \sum & \sum \\ \sum_4 & \sum & \sum \end{pmatrix}$$

2.5 Matriz de flexibilidad. EJEMPLO



La matriz de flexibilidad es inmediata:

$$\begin{pmatrix} \frac{4+5}{3} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5+8}{3} & \frac{8}{6} \\ 0 & \frac{8}{6} & \frac{8+6}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}$$

Los términos independientes:

$$\sum \varphi_2 = \frac{qL_1^3}{24EI} + \frac{PL_2^2}{16EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 * 4^3}{24EI} + \frac{10 * 5^2}{16EI} = 18{,}291\hat{6}$$

$$\sum \varphi_3 = \frac{10 * 5^2}{16EI} + \frac{1 * 8^3}{24EI} = 36{,}958\hat{3}$$

$$\sum \varphi_4 = \frac{1 * 8^3}{24EI} + \frac{5 * 6^2}{16EI} = 32{,}58\hat{3}$$

Podemos establecer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0{,}833 & 0 \\ 0{,}833 & 4{,}333 & 1{,}333 \\ 0 & 1{,}333 & 4{,}666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}291\hat{6} \\ 36{,}958\hat{3} \\ 32{,}58\hat{3} \end{pmatrix}$$

De donde sacamos los valores de los momentos directamente:

$M_2 = 4{,}4129$
$M_3 = 6{,}0659$
$M_4 = 5{,}2501$

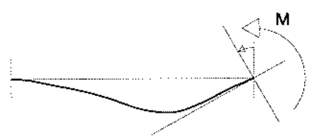
Con estos datos ya podemos dibujar las gráficas de momentos, cortantes, axiles y hacer todos los cálculos que sean necesarios.

3 Cálculo de vigas continuas. MATRIZ DE RIGIDEZ

En el método anterior se hace un análisis de la viga continua a partir de otra equivalente que difería de la original en que respetaba el equilibrio y no tenía más remedio que acusar incoherencia geométrica, igualando los giros en los nudos. Ahora se intenta plantear el problema a la inversa, es decir, suponer inicialmente coherencia total geométrica –giro nulo en los nudos- aunque se produzca un desequilibrio de momentos que es preciso corregir. Este método nos permite una fácil generalización a todo tipo de problemas, como es el de los pórticos planos.

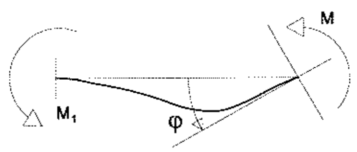
En este caso se consideran las vigas como EMPOTRADAS.

Si uno de los apoyos gira es porque existe un momento que le ha producido ese giro.



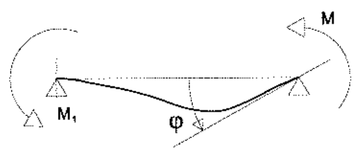
En el empotramiento el giro es CERO.

$$-\frac{ML}{6EI}+\frac{M_1L}{3EI}=0 \quad\Rightarrow\quad M_1=\frac{M}{2}$$



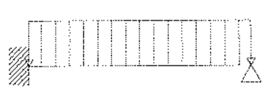
Como tenemos un momento, en el otro apoyo tenemos un momento que es la mitad.

Si hallamos el giro que se produce:



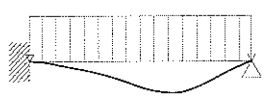
$$\varphi=\frac{ML}{3EI}-\frac{\frac{M}{2}L}{6EI}=\frac{ML}{4EI}\Rightarrow M=\frac{4EI}{L}\varphi \;;\; M_1=\frac{2EI}{L}\varphi$$

3.1 Matriz de rigidez. EXPLICACIÓN DEL MÉTODO

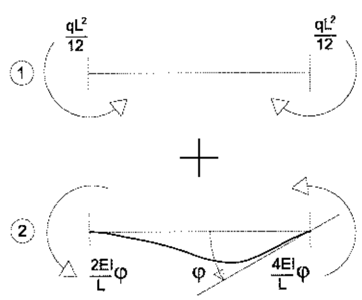


Queremos resolver esta estructura.

La viga se deforma para soportar las cargas.



Para el cálculo descomponemos la viga en sus cargas y en sus movimientos:



1. La estructura sin la deformación (impedimos el giro en el extremo apoyado) y con la carga.

2. Consideramos únicamente la deformación, el giro en el apoyo.

En **1**, los momentos al no existir el giro son inmediatos: ***momentos de empotramiento perfecto***.

En **2** hemos calculado anteriormente el valor.

a) Calculamos el movimiento:
Por las condiciones de sustentación sabemos que el momento en el apoyo es cero:

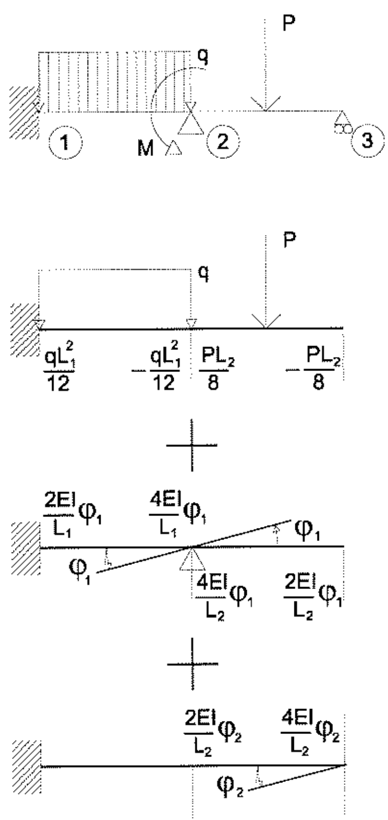
$$-\frac{qL^2}{12}+\frac{4EI}{L}\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=\frac{L}{4EI}*\frac{qL^2}{12}=\frac{qL^3}{48}EI$$

Una vez calculado en giro, hallamos el momento:

$$M_T=\frac{qL^2}{12}+\frac{2EI}{L}*\frac{qL^3}{48EI}=\frac{qL^2}{8}$$

Observamos que con este método el problema se resuelve de un modo indirecto; aunque lo que se buscan son las solicitaciones, se plantean en función de las deformaciones, que son las incógnitas del método; una vez resueltas éstas se vuelve tras los pasos anteriores para calcular las solicitaciones. La ventaja está en que en general conocemos los momentos de empotramiento, con lo que no hace falta calcularlos cada vez que se plantea el problema.

3.2 Matriz de rigidez. PLANTEAMIENTO



El planteamiento del método es como en el caso anterior;

-consideramos todos los nudos como empotrados
-consideramos las deformaciones en cada nudo individualmente, es decir, los giros impedidos uno a uno.

No hemos tenido en cuenta el momento exterior aplicado en **2**. Sólamente lo consideraremos al sumar todos los momentos, que en ese apoyo no serán igual a cero, sino que tendrán que ser igual a M_{ext}.

La suma de momentos:

$$2.\quad -\frac{qL_1^2}{12}+\frac{PL_2}{8}+\frac{4EI}{L_1}\varphi_1+\frac{4EI}{L_2}\varphi_1+\frac{2EI}{L_2}\varphi_2=M$$

$$3.\quad \frac{PL_2}{8}+\frac{2EI}{L_2}\varphi_1+\frac{4EI}{L_2}\varphi_2=0$$

Agrupamos términos:

$$\left(\frac{4EI}{L_1}+\frac{4EI}{L_2}\right)\varphi_1 \quad + \frac{2EI}{L_2}\varphi_2 \quad = \quad M-\left(-\frac{qL_1^2}{12}+\frac{PL_2}{8}\right)$$

$$\frac{2EI}{L_2}\varphi_1 \quad + \frac{4EI}{L_2}\varphi_2 \quad = \quad 0-\left(-\frac{PL_2}{8}\right)$$

Si suponemos *EI*=cte

$$EI\begin{pmatrix} \frac{4}{L_1}+\frac{4}{L_2} & \frac{2}{L_2} \\ \frac{2}{L_2} & \frac{4}{L_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum M_E^1-\sum \hat{M}_1 \\ \sum M_E^2-\sum \hat{M}_2\end{pmatrix}$$

En este caso el término independiente es la suma de momentos exteriores menos el sumatorio de los momentos de empotramiento.
Al resolver el sistema obtendemos los giros de los nudos. Para conocer el valor de los MOMENTOS, hay que sumar todos los momentos que tenemos hallados en función de los GIROS.

M_T

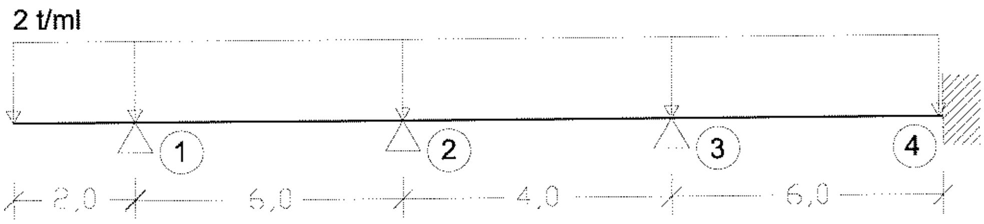
En una viga cualquiera, la suma de momentos es:

$$\hat{M}+\varphi_1*\frac{4EI}{L_1}+\varphi_2*\frac{2EI}{L_1}$$

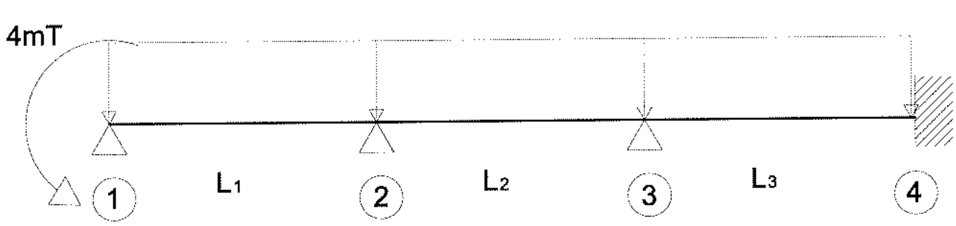
O sea,

$M_{empotramiento}$+ giro del nudo*4EI/L_1+ giro del nudo de enfrente*2EI/L_1

3.3 Matriz de rigidez. EJEMPLO



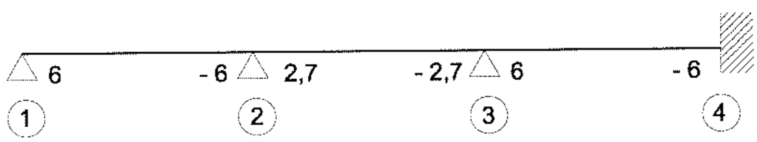
La matriz de RIGIDEZ está formada por los nudos que se mueven, luego podemos sustituir el vuelo por su acción.

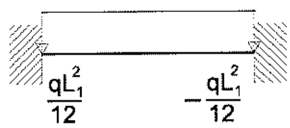


Formamos la matriz de rigidez. Es una matriz simétrica:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\
\hline
\varphi_1 & \dfrac{4EI}{L_1} & \dfrac{2EI}{L_1} & 0 \\[2ex]
\varphi_2 & \dfrac{2EI}{L_1} & \dfrac{4EI}{L_1}+\dfrac{4EI}{L_2} & \dfrac{2EI}{L_2} \\[2ex]
\varphi_3 & 0 & \dfrac{2EI}{L_2} & \dfrac{4EI}{L_1}+\dfrac{4EI}{L_2}
\end{array}
$$

Los momento de empotramiento son:





El sistema queda:

$$
EI\begin{pmatrix} 0,66 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1,66 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 1,66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 3,3 \\ -3,3 \end{pmatrix}
$$

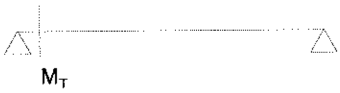
Soluciones:

φ_1= -5/EI

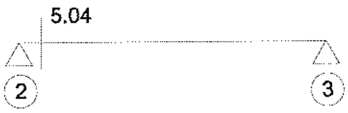
φ_2= 3.93/EI

φ_3= -3.17/EI

Una vez calculados los giros, los momentos son:

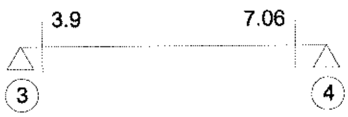


$$\hat{M} + \varphi_1 * \frac{4EI}{L_1} + \varphi_2 * \frac{2EI}{L_1}$$



nudo2

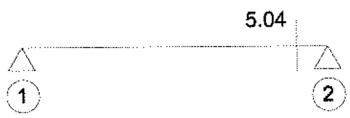
$$2.\quad 2.7 + \frac{3.93}{EI} * \frac{4EI}{4} + \left(-\frac{3.17}{EI} * \frac{2EI}{4} \right) = 5.04$$



nudos 3 y 4

$$3.\quad 6 + \left(-\frac{3.17}{EI} * \frac{4EI}{6} \right) = 3.9$$

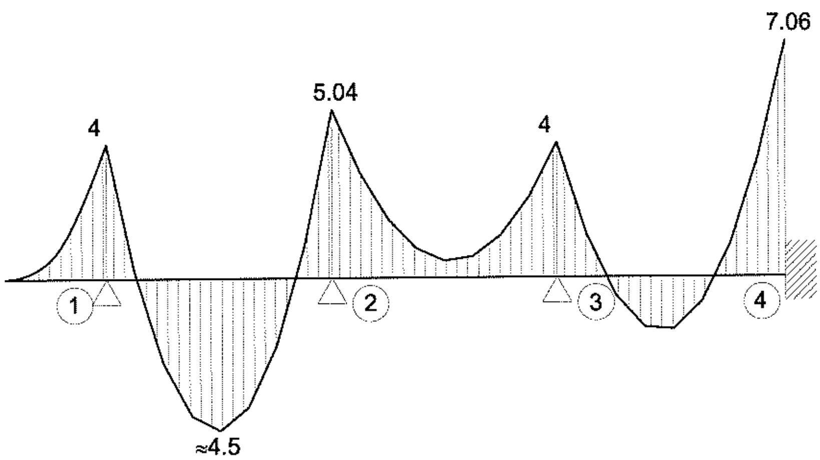
$$4.\quad -6 + 0 + \left(-\frac{3.17}{EI} * \frac{2EI}{6} \right) = -7.06$$



En este caso el nudo 4 no gira por ser un empotramiento.

1. En el nudo 1 sabemos que M=4 (momento debido al voladizo).

Con estos datos obtenemos la gráfica de momentos, de donde sacamos los cortantes, axiles...



4. análisis de pórticos. MATRIZ DE RIGIDEZ

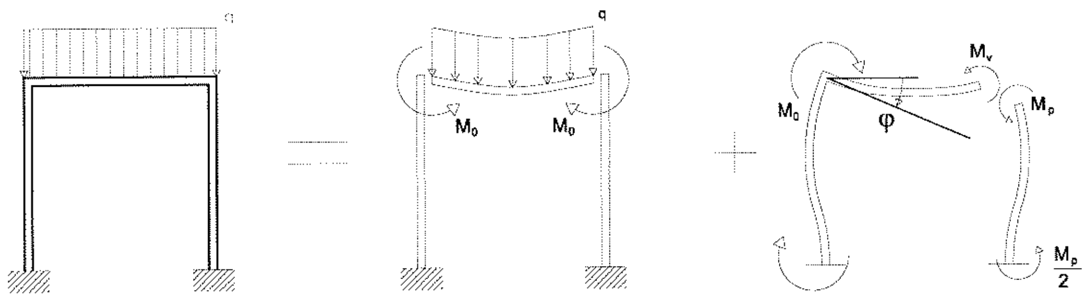
El método de la rigidez se basaba en plantear un giro nulo en los nudos -suponiéndolos todos empotrados- para luego equilibrar los momentos. La existencia de nudos rígidos en los dinteles de los pórticos nos permite plantear las condiciones de deformación ya que el giro del soporte va a depender del de la viga o dintel.

Para el análisis de los pórticos vamos a considerar inicialmente dos casos:

- pórticos intraslacionales: los nudos sólo pueden girar
- pórticos traslacionales: además pueden experimentar desplazamientos.

4.1 matriz de rigidez. PÓRTICOS INTRASLACIONALES

En estos los nudos no se desplazan, únicamente pueden girar.



1. Si tomamos como hipótesis de partida el comportamiento de cada pieza con los extremos fijos y sin girar, de hecho estamos ignorando la estructura como tal; el problema es sólo el de un conjunto de barras por separado. El dintel está sometido en ambos extremos al que hemos denominado momento de empotramiento perfecto, que para sección constante y carga distribuída era de valor $M^0=q*L^2/12$.

2. Estudiamos el comportamiento geométrico de la estructura, es decir, los giros φ de cada nudo. Es en este paso en el que realmente se considera a la estructura como a un todo, en el que unas partes interaccionan con las demás.

Para que se produzca un giro φ en el soporte, debe actuar en su extremo un momento,

$$M_p = \varphi * \frac{4EI_p}{L}$$

y en la viga:

$$M_v = \varphi * \frac{2EI_v}{L}$$

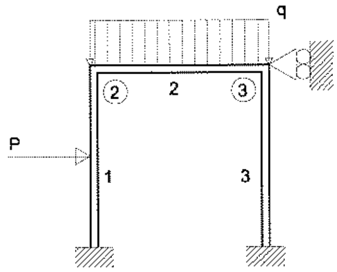
La ecuación de equilibrio es:

$$M_p + M_v = M_0$$

o sea;

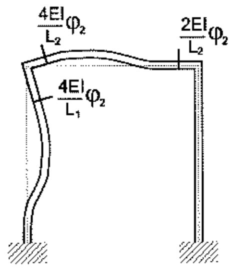
$$\varphi * \frac{4EI_p}{L} + \varphi * \frac{2EI_v}{L} = \frac{qL^2}{12}$$

Ecuación con una única incógnita φ, que puede resolverse fácilmente. En el caso de la existencia de más nudos, existirán más giros φ_n, que nos darán tantas incógnitas como ecuaciones.



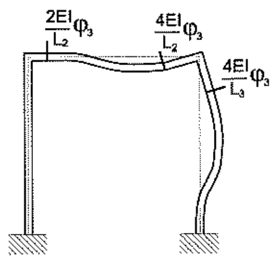
Este es un pórtico intraslacional que puede únicamente girar en los nudos 2 y 3.

Estudiamos qué ocurre cuando gira el nudo 2. Estos son los momentos debidos al giro estudiados anteriormente:



	φ_2	φ_3
φ_2	$\left(\dfrac{4EI}{L}\right)^{1+2}$	$\left(\dfrac{2EI}{L}\right)^{2}$
φ_3		

Giramos el otro nudo:



	φ_2	φ_3
φ_2	$\left(\dfrac{4EI}{L}\right)^{1+2}$	$\left(\dfrac{2EI}{L}\right)^{2}$
φ_3	$\left(\dfrac{2EI}{L}\right)^{2}$	$\left(\dfrac{4EI}{L}\right)^{2+3}$

Los momentos a los que hay que igualar los momentos producidos por los giros son los exteriores más los producidos por las cargas.

$$\sum M_E - \sum \hat{M}_i$$

En este caso:

$$\sum M_E - \left(\frac{qL^2}{12} - \frac{PL}{8}\right)$$

$$\sum M_E - \left(-\frac{qL^2}{12}\right)$$

Luego las ecuaciones reales son:

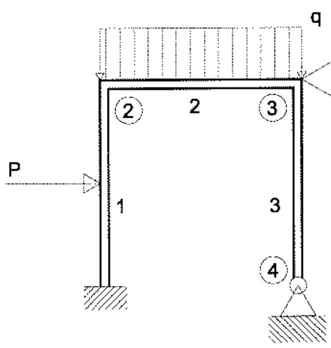
$$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+2} * \varphi_2 + \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} * \varphi_3 = 0 - \left(\frac{qL_2^2}{12} - \frac{PL_1}{8}\right)$$

$$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} * \varphi_2 + \left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3} * \varphi_3 = 0 - \left(-\frac{qL_2^2}{12}\right)$$

El sistema con la matriz es:

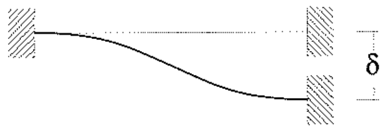
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+2} & \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} \\ \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} & \left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \left(\frac{qL_2^2}{12} - \frac{PL_1}{8}\right) \\ 0 - \left(-\frac{qL_2^2}{12}\right) \end{pmatrix}$$

NOTA: En el caso del mismo pórtico con un apoyo articulado, habría que considerar el giro en el mismo al no estar impedido, luego en el nuevo sistema habría que incluirlo.

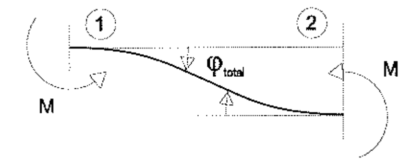


$$\begin{array}{c|cc:c} & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \hline \varphi_2 & \left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+2} & \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} & \text{matriz} \\ \varphi_3 & \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} & \left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3} & \text{simétrica} \\ \hdashline \varphi_4 & 0 & \left(\frac{2EI}{L}\right)^{3} & \left(\frac{4EI}{L}\right)^{3} \end{array}$$

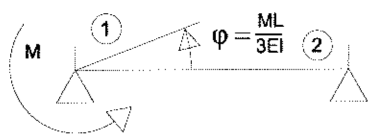
desplazamiento de un apoyo. MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO LOCAL.



Si desplazamos uno de los apoyos de la viga una cantidad, esta sufrirá una deformación.



Debido a ello aparecerán unos momentos que justiquen la existencia de esos giros, luego estarán provocando en los apoyos unos esfuerzos debidos al desplazamiento además de los que puedan existir debido a la propia carga.

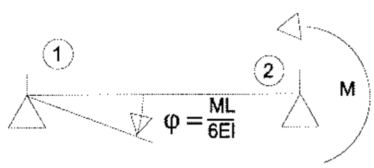


- El giro en el nudo **1** será la suma de los producidos por cada momento:

$$\varphi_{total} = \frac{ML}{3EI} - \frac{ML}{6EI} = \frac{ML}{6EI}$$

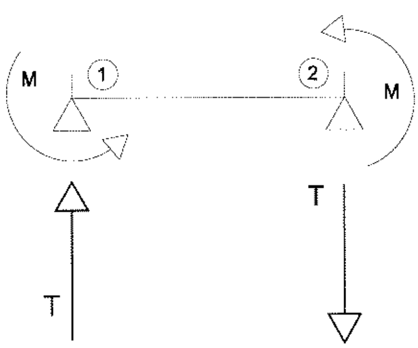
Si despejamos el momento:

$$M = \frac{6EI}{L} * \varphi$$



Como estamos en la hipótesis de deformaciones pequeñas,

$$tg\varphi = \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\partial}{L}$$



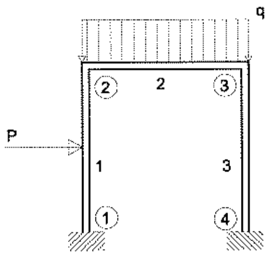
Sustituimos en el momento:

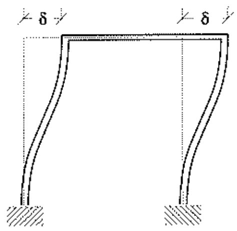
$$M = \frac{6EI}{L} * \frac{\partial}{L} = \frac{6EI}{L^2}$$

Debido al desequilibrio de momentos tiene que existir un cortante:

$$T = \frac{M + M}{L} = \frac{12EI}{L^3} * \partial$$

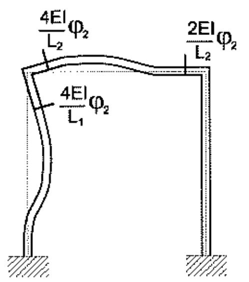
4.4 Planteamiento de la matriz de rigidez en PORTICOS TRASLACIONALES



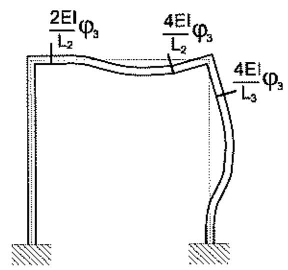


En este caso, los nudos **2** y **3** pueden girar, como en el ejemplo anterior, y además se DESPLAZAN.

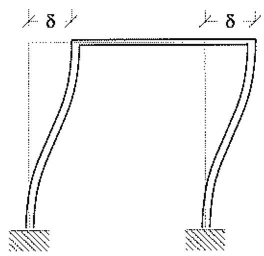
Posibilidades de movimiento:



Giro del nudo **2**



Giro del nudo **3**



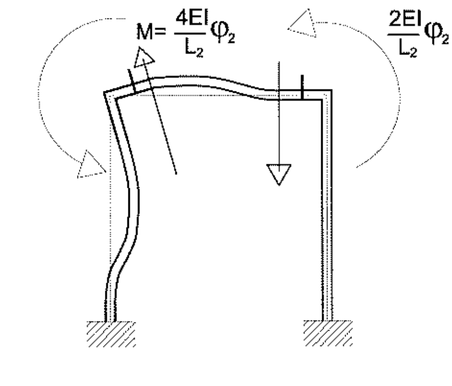
Desplazamiento del dintel

Formación de la MATRIZ DE RIGIDEZ:

	φ_1	φ_2	∂
φ_1	$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+2}$	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{2}$	$\left(\frac{6EI}{L^2}\right)^{1}$
φ_2	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{2}$	$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3}$	$\left(\frac{6EI}{L^2}\right)^{3}$
∂	matriz simétrica		$\left(\frac{12EI}{L^3}\right)^{1+3}$

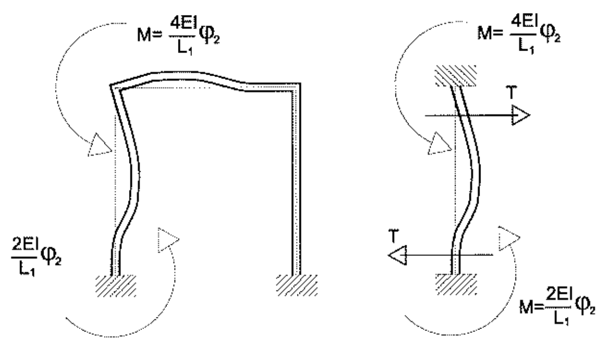
A continuación vemos como se han obtenido los valores de la matriz debidos al desplazamiento:

Cortante producido en el dintel (barra 2) debido al giro del nudo 2



Aparece un CORTANTE debido al momento producido por el giro, pero no se considera ya que no actúa en la dirección del desplazamiento **δ**

Cortante producido en la barra 1 debido al giro del nudo 2

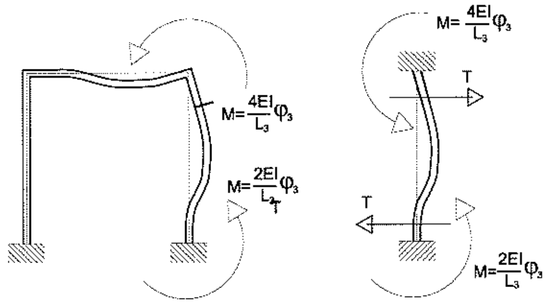


Para equilibrar los momentos en la barra, tiene que existir un cortante, que será el que actúe desplazando el dintel. En este caso la dirección es en la del movimiento supuesto (hacia la derecha), luego lo tomamos como positivo.

NOTA: sería como en el caso de un Cross traslacional, donde en el estado 0 hemos colocado las bielas pertinentes para impedir los desplazamientos. En este caso actuaríamos comprimiendo esa biela ficticia.

$$T=\frac{M_1+M_2}{L}=\frac{\frac{4EI}{L_1}+\frac{2EI}{L_1}}{L_1}=\frac{6EI}{L_1^2}$$

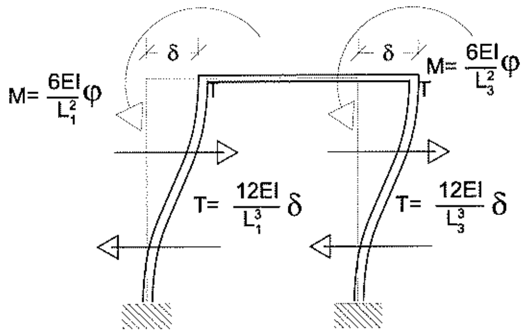
Cortante producido en la barra 3 debido al giro del nudo 3



Es el mismo razonamiento:

$$T=\frac{M_1+M_2}{L}=\frac{\frac{4EI}{L_3}+\frac{2EI}{L_3}}{L_3}=\frac{6EI}{L_3^2}$$

Cortantes producidos por el desplazamiento del dintel (barra 2)



Se producen los *momentos de empotramiento local*, ya calculados, debidos al desplazamiento de los nudos.

El valor del cortante es también conocido:

$$T = \frac{12EI}{L^3} * \partial$$

Para el cortante, en la matriz colocamos únicamente los coeficientes, ya que **δ** es una incógnita que despejamos. En este caso, actúan dos cortantes en el desplazamiento, luego el término que irá en la matriz será la suma de ambos:

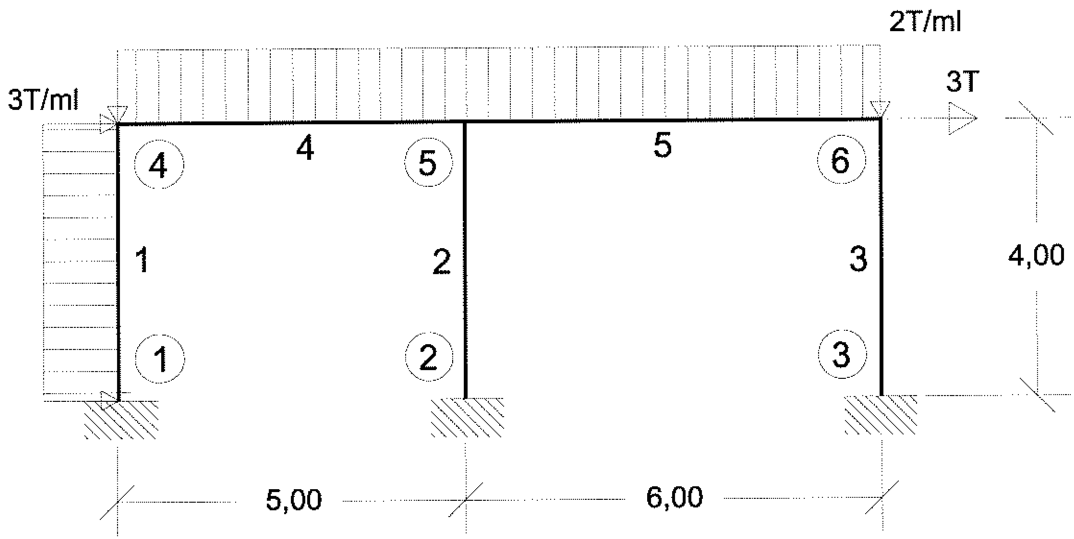
$$T = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_3^3} = \left(\frac{12EI}{L^3}\right)^{1+3}$$

Es decir, que en este término actuará el cortante de todas las barras que se desplazan.
(NOTA: mucho cuidado con los signos).

Finalmente, teniendo en cuenta que la matriz de rigidez es simétrica:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+2} & \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} & \left(\frac{6EI}{L}\right)^{1} \\ \left(\frac{2EI}{L}\right)^{2} & \left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3} & \left(\frac{6EI}{L}\right)^{3} \\ \left(\frac{6EI}{L}\right)^{1} & \left(\frac{6EI}{L}\right)^{3} & \left(\frac{12EI}{L^3}\right)^{1+3} \end{pmatrix}$$

4.5 matriz de rigidez. APLICACIÓN PRÁCTICA EN EL CASO DE PÓRTICOS TRASLACIONALES



En primer lugar hemos numerado todos los nudos y las barras.

Estamos en el caso de un pórtico traslacional, donde existe un posible desplazamiento δ del dintel. Veamos los movimientos de la estructura:

- Los nudos 1, 2 y 3 son empotramientos, luego por definición tienen impedidos todos los movimientos.
- Los nudos 4, 5 y 6 pueden girar.
- Como además se ha dicho, hay un desplazamiento del dintel.

NOTA: para hallar los términos de la matriz de rigidez es conveniente analizar los movimientos uno a uno como en el caso anterior, y viendo como actúan, ya *rellenar* la matriz.

En este caso queda:

	φ_4	φ_5	φ_6	∂
φ_4	$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{1+4}$	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{4}$	0	$\left(\frac{6EI}{L^2}\right)^{1}$
φ_5	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{4}$	$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{2+3}$	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{5}$	$\left(\frac{6EI}{L^2}\right)^{2}$
φ_6	0	$\left(\frac{2EI}{L}\right)^{5}$	$\left(\frac{4EI}{L}\right)^{3+5}$	$\left(\frac{6EI}{L^2}\right)^{3}$
∂	este término es SIMÉTRICO			$\left(\frac{12EI}{L^3}\right)^{1+2+3}$

Si consideramos la misma inercia y el mismo material (mismo E):

$$\begin{pmatrix} 1.8 & 0.4 & 0 & 0.375 \\ 0.4 & 2.47 & 0.33 & 0.375 \\ 0 & 0.33 & 1.67 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.5625 \end{pmatrix}$$

Cálculo del TÉRMINO INDEPENDIENTE:

En el caso de los términos correspondientes a los giros φ_4, φ_5, φ_6 son como ya sabemos la suma de los momentos exteriores menos los de aquellos producidos por las cargas.

$$\sum M_E - \sum \hat{M}_i$$

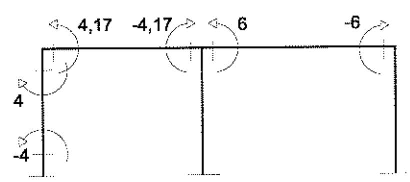
Entonces:

$$nudo \quad 4 \Rightarrow \quad \sum M_E - \sum \hat{M}_i = 0 - \frac{q_1 L_1^2}{12} - \frac{q_2 L_4^2}{12} = 0 - \left(-4 + 4.1\hat{6}\right) = -0{,}1\hat{6}$$

$$nudo \quad 5 \Rightarrow \quad \sum M_E - \sum \hat{M}_i = 0 - \left(6 - 4.1\hat{6}\right) = -1{,}8\hat{3}$$

$$nudo \quad 6 \Rightarrow \quad \sum M_E - \sum \hat{M}_i = 0 - \left(-6\right) = +6$$

NOTA: para ver mejor estos cálculos, conviene dibujar la estructura con los M_{EMP}, lo que permite una visión más rápida:



Los M_{EMP} son los debidos a la carga distribuída:

$$M_E = \frac{qL^2}{12}$$

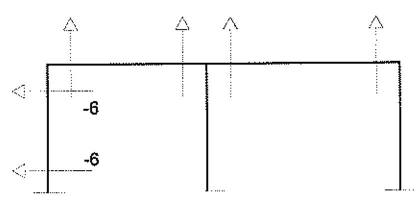
La carga puntual no produce momentos en las barras al estar aplicada en un nudo.

En el caso del término independiente debido al desplazamiento, corresponderá a la suma de los cortantes que influyen en el movimiento de la estructura:

$$\sum T = \sum T_E - \sum T_i$$

Es decir, el sumatorio de las fuerzas exteriores actuando en la dirección del movimiento menos el sumatorio de los cortantes debidos a las cargas exteriores en la dirección del movimiento.

Para ver mejor como actúa, los dibujamos:



$$T_1 = \frac{qL}{2} = \frac{3*4}{2} = 6$$

El signo negativo es porque hemos supuesto el movimiento δ hacia la derecha.

Finalmente, nuestro sistema de ecuaciones quedará como:

$$EI\begin{pmatrix} 1.8 & 0.4 & 0 & 0.375 \\ 0.4 & 2.47 & 0.33 & 0.375 \\ 0 & 0.33 & 1.67 & 0.375 \\ 0.375 & 0.375 & 0.375 & 0.5625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \partial \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0{,}17 \\ 0-1{,}8 \\ 0+6 \\ 3-(-6) \end{pmatrix} =$$

Solución:

$$\varphi_4 = -\frac{3{,}74}{EI} \qquad \varphi_6 = -\frac{0{,}476}{EI}$$

$$\varphi_5 = -\frac{3{,}24}{EI} \qquad \partial = \frac{20{,}975}{EI}$$

Con estos datos ya podemos hallar los momentos:

$$M_{45} = \widehat{M} + \left(\frac{4EI}{L}\right)^4 * \varphi_4 + \left(\frac{2EI}{L}\right)^4 * \varphi_5$$

$$M_{45} = 4{,}17 + \left(-\frac{4EI}{5} * \frac{3{,}74}{EI}\right) + \left(-\frac{2EI}{5} * \frac{3.24}{EI}\right)$$

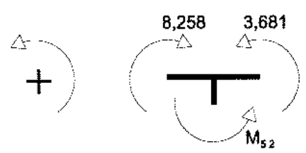
$$M_{45} = 4{,}17 - 2{,}992 - 1{,}296 = -0{,}118 mT$$

$$M_{54} = -4{,}17 + \left(-\frac{2EI}{5} * \frac{3{,}74}{EI}\right) + \left(-\frac{4EI}{5} * \frac{3.24}{EI}\right) = -8{,}258 mT$$

$$M_{56} = 6 + \left(-\frac{4EI}{6} * \frac{3{,}24}{EI}\right) + \left(-\frac{2EI}{6} * \frac{0{,}476}{EI}\right) = 3{,}681 mT$$

$$M_{65} = -6 + \left(-\frac{2EI}{6} * \frac{3{,}24}{EI}\right) + \left(-\frac{4EI}{6} * \frac{0{,}476}{EI}\right) = -7{,}397 mT$$

Para el momento M_{52} podemos hacerlo de dos formas:
- equilibrando el nudo:



$-8{,}258 + 3{,}681 + M_{52} = 0$; $M_{52} = 4{,}577$mT

- o como los casos anteriores:

$$M_{52} = 0 + \left(-\frac{4EI}{L} * \frac{3{,}24}{EI}\right) + \left(-\frac{6EI}{L^2} * \partial\right) = 4{,}625 mT$$

El momento en los APOYOS será: (*tenemos en cuenta que* φ_1, φ_2, φ_3 *son cero, por definición de empotramiento*)

$$M_1 = \hat{M} + \frac{2\,EI}{L_1} * \varphi_4 + \frac{4\,EI}{L_1} * \varphi_1 + \frac{6\,EI}{L^2} * \partial =$$

$$= 4 - \frac{2EI}{4} * \frac{3{,}74}{EI} + \frac{4EI}{L_1} * 0 + \frac{6EI}{16} * \frac{20{,}975}{EI} = 9{,}995 \approx 10mT$$

$$M_2 = 0 - \frac{2EI}{4} * \frac{3{,}24}{EI} + \frac{6EI}{16} * \frac{20{,}975}{EI} = 6{,}245mT$$

$$M_3 = 0 - \frac{2EI}{4} * \frac{0{,}476}{EI} + \frac{6EI}{16} * \frac{20{,}975}{EI} = 7{,}627mT$$

La gráfica de momentos será: