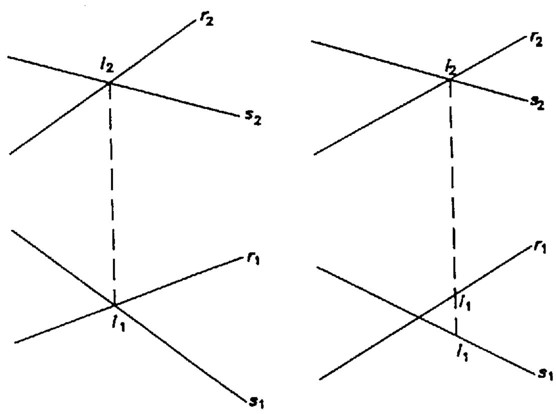
7.1. Intersecciones entre rectas

Deben pertenecer al mismo plano, y si existe intersección se ve inmediatamente, ya que hay una correspondencia entre la proyección horizontal y la vertical del punto de intersección.

Rectas que se cortan

Rectas que se cruzan

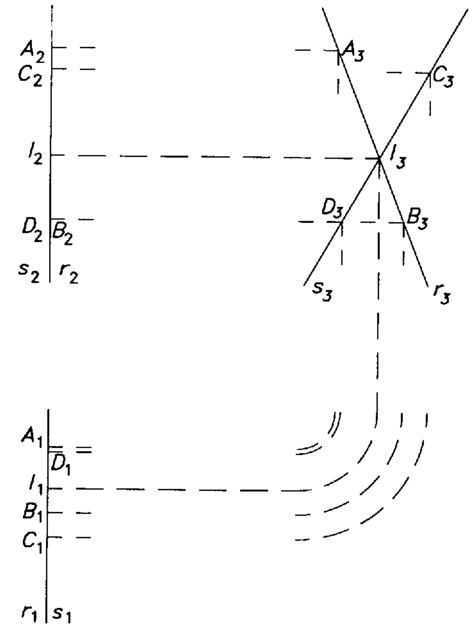


Casos de indeterminación:

1) Rectas que pertenecen a un mismo plano de perfil

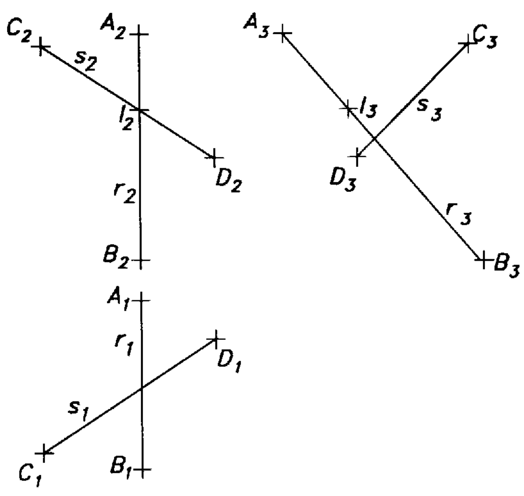
La indeterminación queda resuelta con la tercera proyección. Para que haya intersección, las dos rectas -de perfil- deben pertenecer a un mismo plano de perfil. Por lo tanto, las proyecciones horizontal y vertical de las dos rectas deben superponerse.

No existirá intersección si las dos rectas son paralelas, lo cual se verá en la tercera proyección.



2) Cuando una recta es de perfil

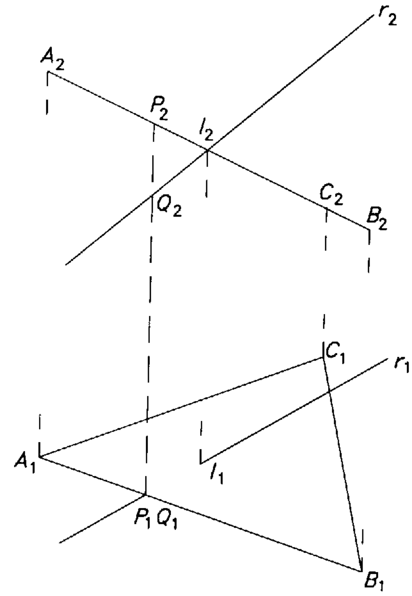
Si hubiera intersección, el punto **I** (que pertenece a **r**) debería pertenecer, también, a **s**.



7.2. Intersección entre recta y plano

1) Recta r y plano ABC (proyectante)

El punto de intersección se encuentra de manera inmediata, ya que debe pertenecer simultáneamente a la recta y al plano.



VISIBILIDAD: El punto P tiene mayor cota que Q. Entonces P es visto en proyección horizontal (el lado AB queda por encima de la recta)

2) Recta r y plano cualquiera (oblicuo):

Método general de resolución:

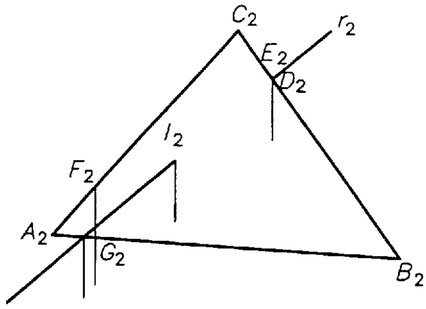
DATOS:
- Proyecciones diédricas de una recta **r**
- Proyecciones diédricas de 3 puntos (**A**,**B**,**C**) que definen el plano **α**.

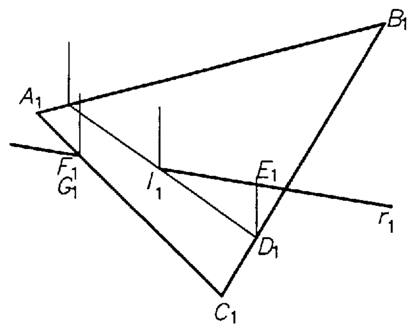
1) Tomamos un plano auxiliar cualquiera que contenga la recta **r** (por ejemplo, un plano proyectante vertical **β**).

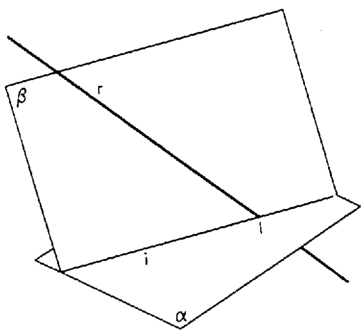
2) Encontramos la recta de intersección entre este plano **α** y el plano **β** (recta **i**).

3) El punto de intersección **I** entre las rectas **r** y **i** es también un punto de intersección buscado.

4) Resolvemos la visibilidad (tomando, por ejemplo, los puntos **D**,**E** y **F**,**G**).

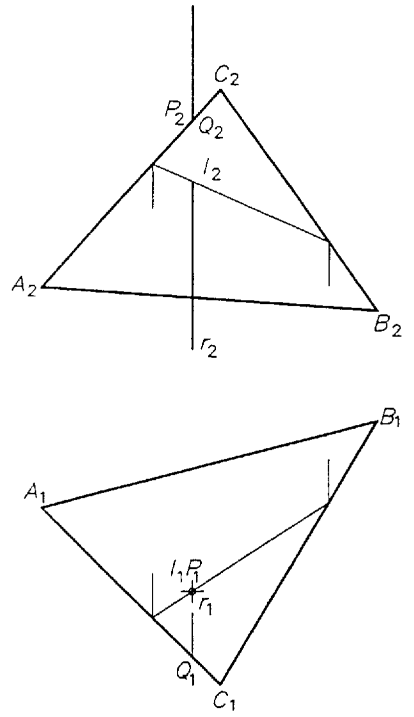






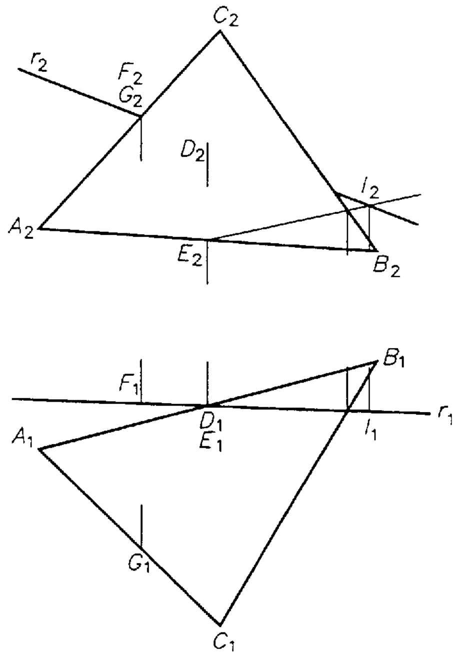
CASOS ESPECIALES:

1) Intersección entre plano cualquiera (oblicuo) y recta vertical.



VISIBILIDAD: El punto P pertenece a la recta y el punto Q pertenece al plano. P queda por detrás de Q y, por lo tanto, el segmento PI es oculto.

2) Puede ocurrir que haya intersección entre plano y recta, pero que ésta quede fuera del triángulo que define el plano.

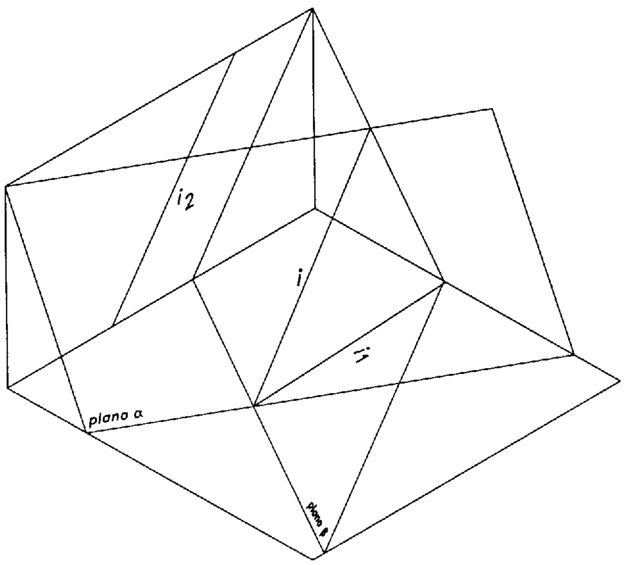


VISIBILIDAD: Tomaremos los puntos D,E,y F,G.

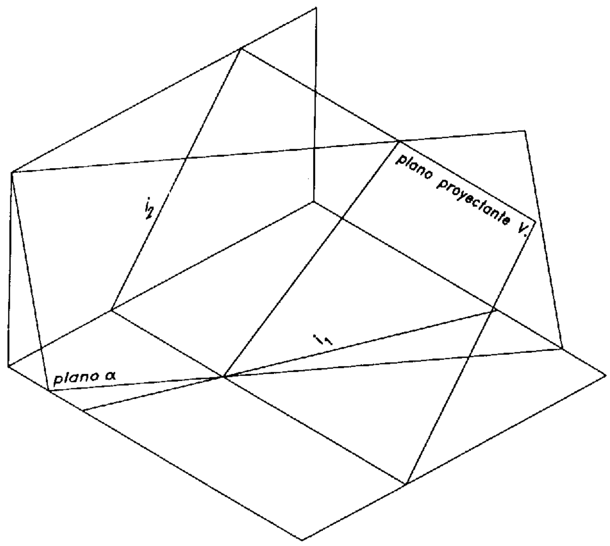
7.3. Intersección entre planos (véanse las figuras de las páginas siguientes)

- Entre planos cualesquiera (oblicuos). Caso general.
- Entre plano oblicuo y plano proyectante (horizontal o vertical).
- Entre plano oblicuo y plano horizontal o frontal.
- Entre planos proyectantes (las 3 posibilidades).
- Entre plano oblicuo y plano paralelo a la **LT**.
- Entre plano oblicuo y plano de perfil.
- Entre dos planos paralelos a la **LT** (tercera proyección).
- Otros casos típicos del **SDT**.
    - Plano paralelo a la **LT** (es proyectante de perfil).
    - Planos que contienen a la **LT** (es proyectante de perfil).
    - Planos con trazas que se corten fuera de los límites del papel.

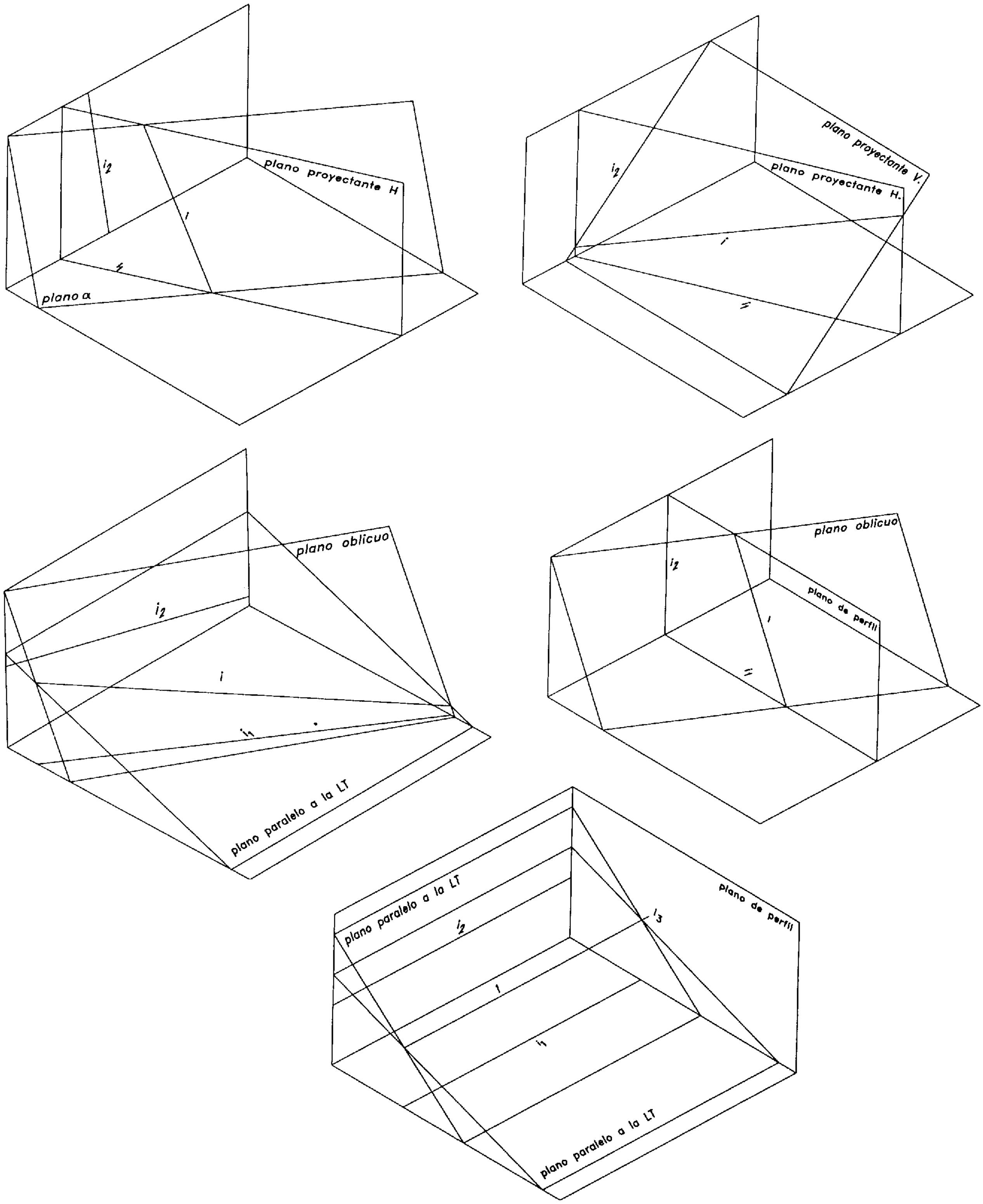
(Los dos últimos casos no tienen sentido cuando no se utiliza la línea de tierra.)



Intersección de dos planos oblicuos. Si trabajamos sin la LT, la recta de intersección se encuentra con la ayuda de dos planos proyectantes.



Intersección de un plano proyectante con un plano oblicuo.

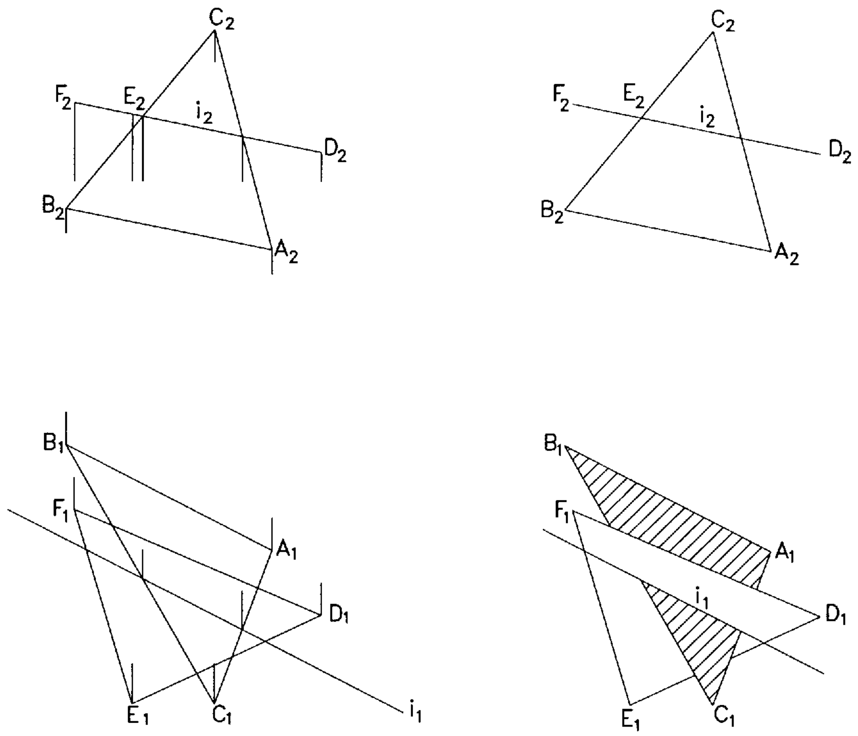


Diferentes planos y sus rectas de intersección. De izquierda a derecha y de arriba a abajo:

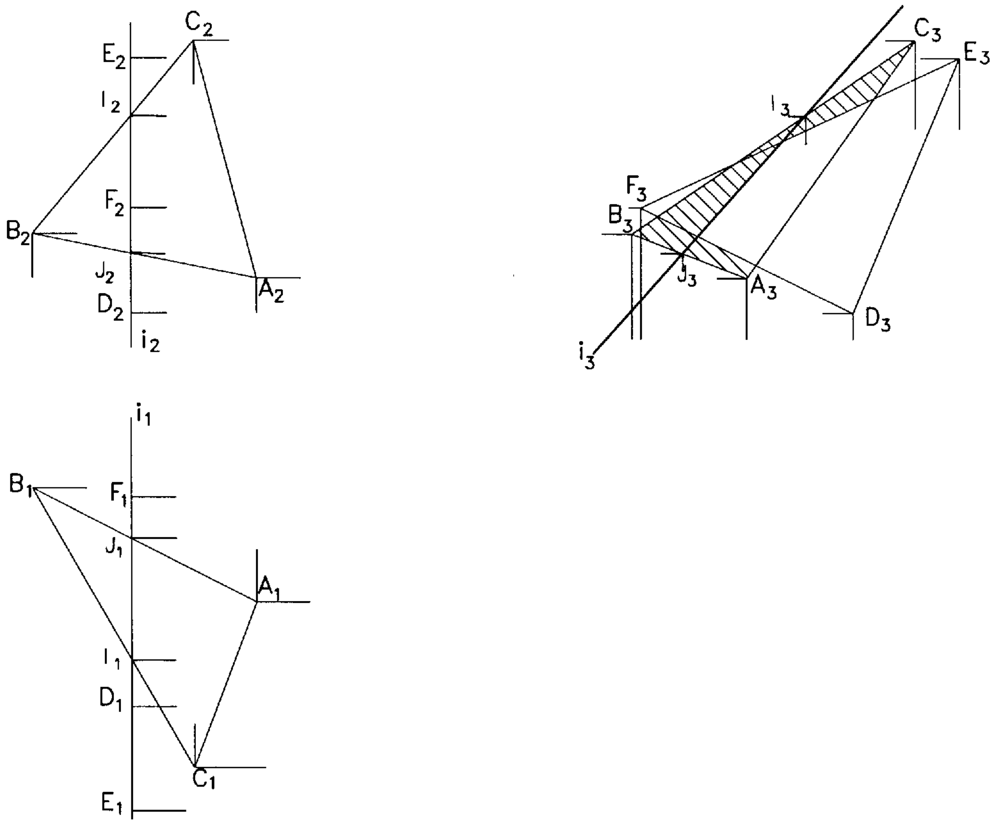
Plano proyectante horizontal y oblicuo
Plano proyectante vertical y proyectante horizontal
Plano paralelo a la línea de tierra y plano oblicuo
Plano de perfil y plano oblicuo
Planos paralelos a la línea de tierra

7.3.1. Cuando un plano es proyectante

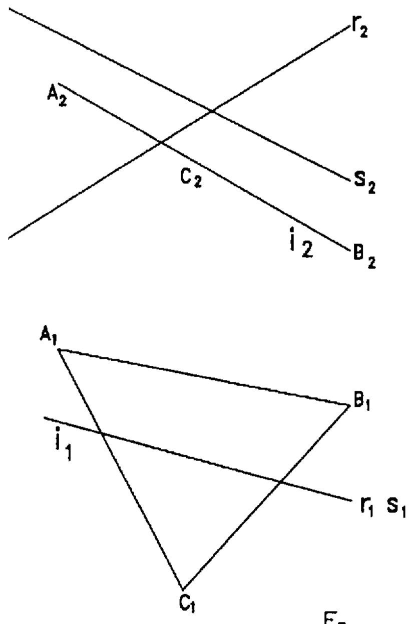
Intersección entre un plano oblicuo y un plano proyectante vertical. La proyección vertical de la recta de intersección se confunde con la proyección vertical del plano proyectante vertical.



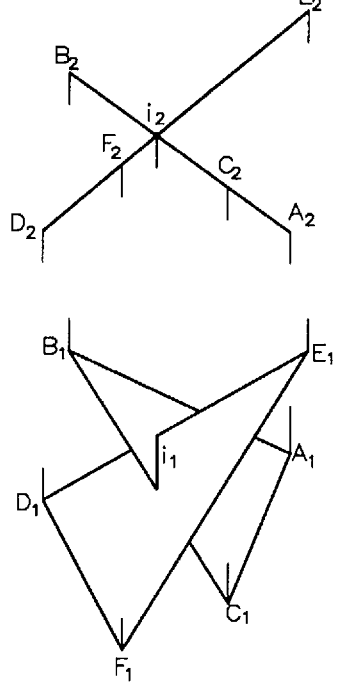
Intersección entre un plano oblicuo y un plano de perfil. Es conveniente una tercera proyección para determinar la recta de intersección.



Intersección entre dos planos proyectantes. Un plano proyectante horizontal dado por los puntos **A,B,C** y un plano proyectante vertical dado por las rectas **r** y **s**.

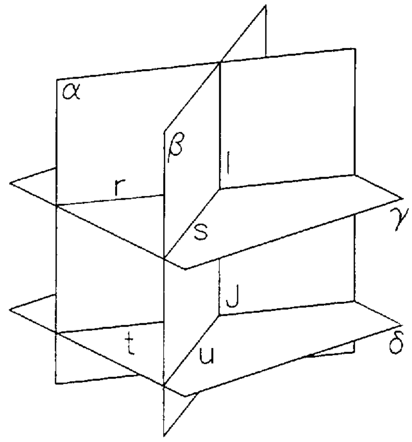


Intersección entre 2 planos proyectantes verticales.
Observamos quc la rccta dc intersección es una recta de punta.



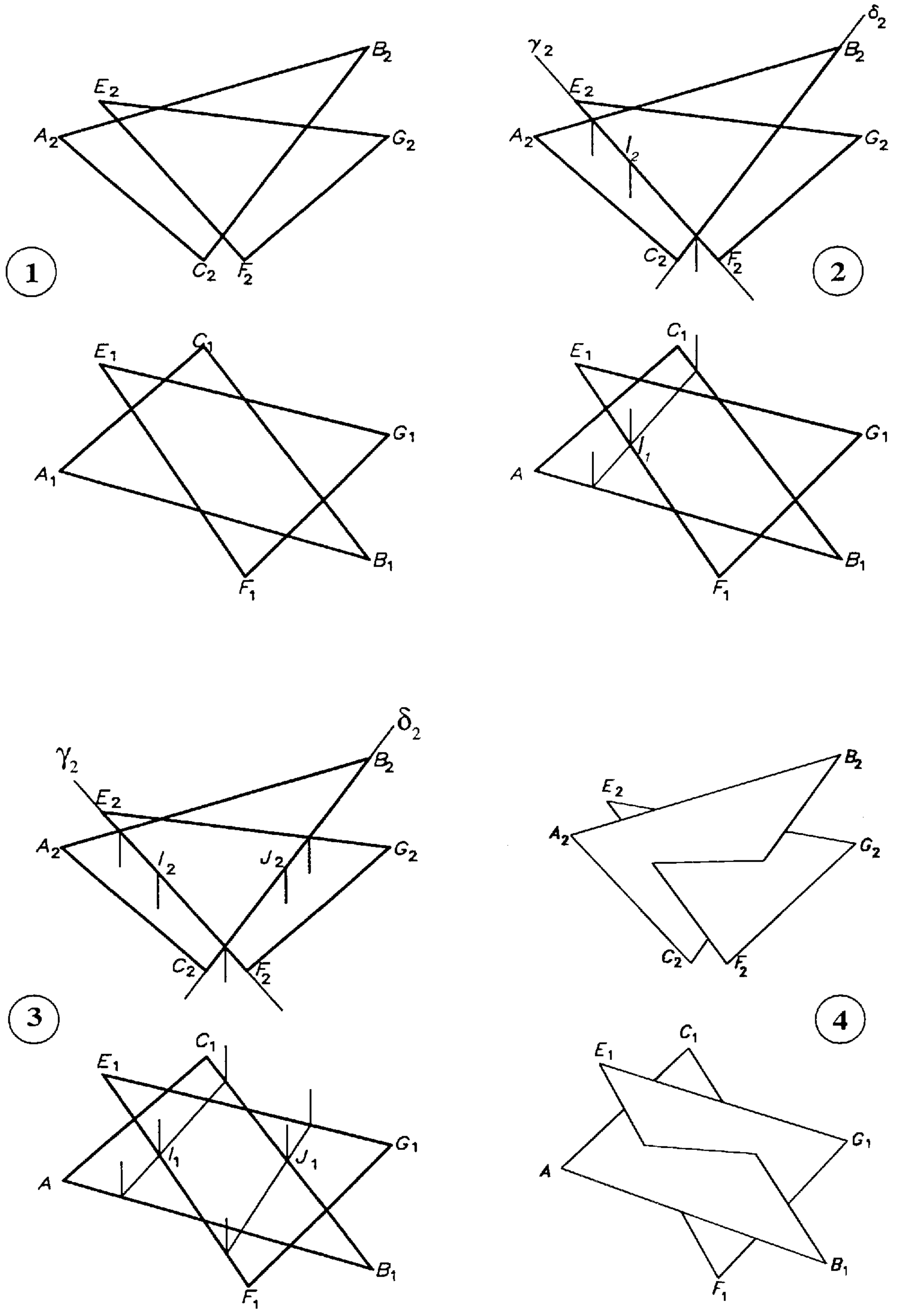
7.3.2. Intersección entre dos planos oblicuos. Caso general

Queremos encontrar la recta de intersección **i** entre los planos **α** y **β**. Utilizaremos dos planos auxiliares **γ** y **δ** *cualesquiera* (serán siempre proyectantes).



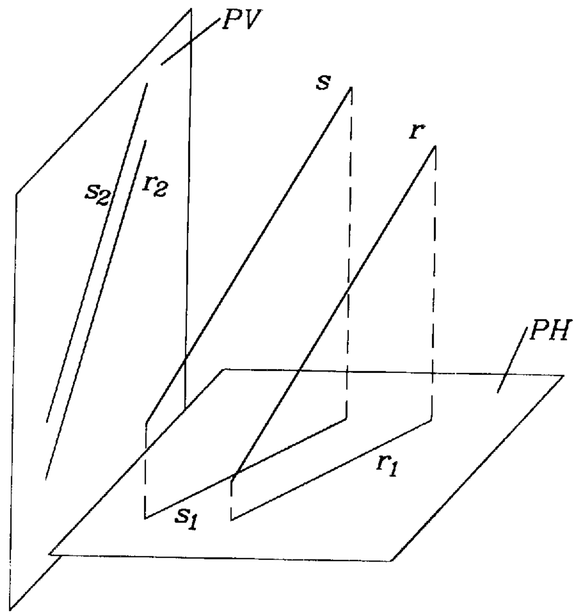
Encontraremos cómodamente las rectas de intersección entre los planos auxiliares y los que son dados (**α** y **β**), y hallaremos de esta manera los puntos **I** y **J** de la recta de intersección.

Intersección de dos planos oblicuos definidos por dos triángulos ABC y EFG sin utilizar trazas



8. PARALELISMO

8.1. Paralelismo entre rectas



Las proyecciones de dos rectas paralelas en el espacio sobre un plano cualquiera serán también paralelas. Así pues, sus proyecciones homónimas en **PH** y **PV** son paralelas, (condición necesaria y «casi» suficiente).

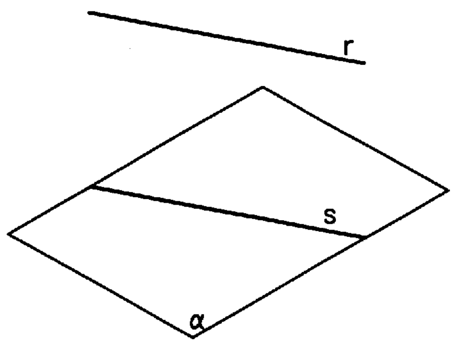
En el caso de las rectas de perfil, queda indeterminado si no se realiza una tercera proyección.

Todas las rectas horizontales de un mismo plano son paralelas entre sí y, por lo tanto, también paralelas a la traza horizontal de un plano.

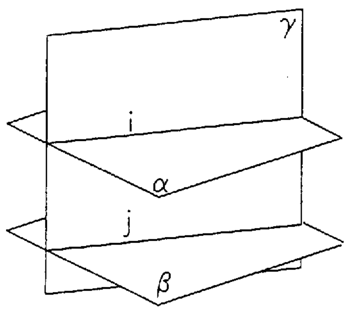
Ocurre lo mismo con las rectas frontales respecto la traza vertical.

8.2. Paralelismo entre recta y plano

Una recta **r** y un plano **A** son paralelos cuando la recta **r** es paralela, como mínimo, a una recta **s** contenida en el plano.



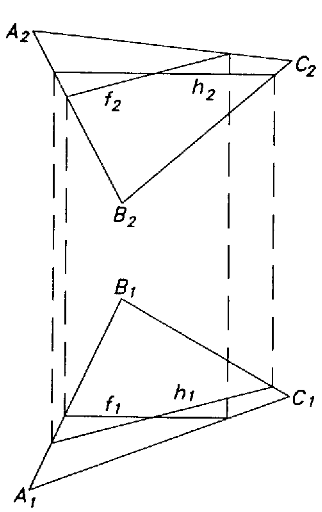
8.3. Paralelismo entre planos

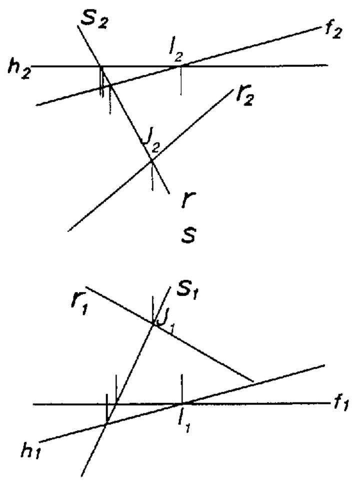


Si cortamos dos planos paralelos α y β por un tercer plano γ, las rectas de intersección **i** y **j** de los planos dados con este plano son paralelas.

Así pues, dos planos serán paralelos cuando las rectas de intersección de estos planos con cualquier otro plano sean paralelas entre sí.

Si dos planos son paralelos, sus trazas homónimas con los planos de proyección también lo son (condición necesaria y «casi» suficiente). Atención con los planos que son paralelos a la **LT**: requieren una tercera proyección para poder determinar si son paralelos o no lo son.



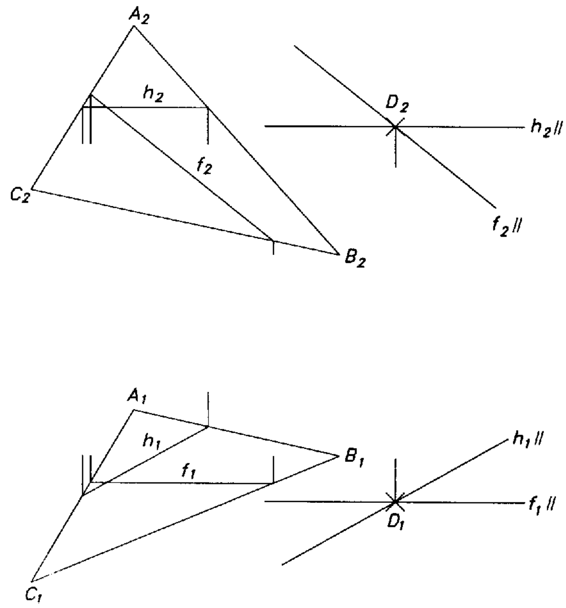


8.4. Ejemplos

1. Dados el plano α por tres puntos **ABC** y el punto **D** que no pertenece a α, encontrar el plano β que contiene a **D** y es paralelo a α. (Solución única.)

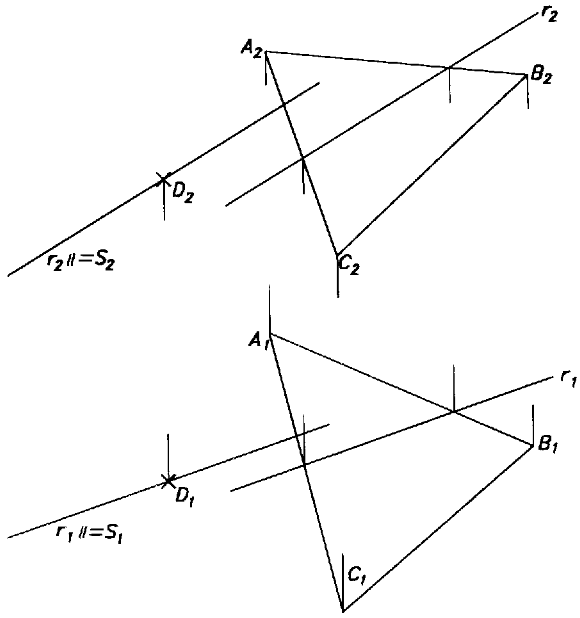
Observación: Una recta **r** es paralela a un plano cuando **r** es paralela, como mínimo a una recta del plano.

Resolución: En este caso se ha optado por definir β mediante una recta frontal y una horizontal que se cortan en el punto **D**.



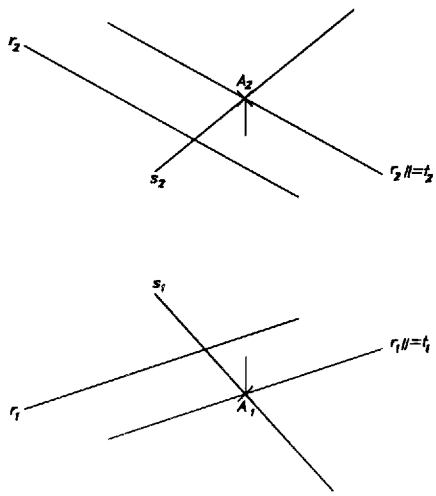
2. Trazar por un punto exterior a un plano una recta que sea paralela al plano. (Infinitas soluciones.)

Resolución: Tomamos una recta **r** cualquiera del plano α definido por **ABC**. La recta **s**, que es paralela a **r**, será paralela a α.



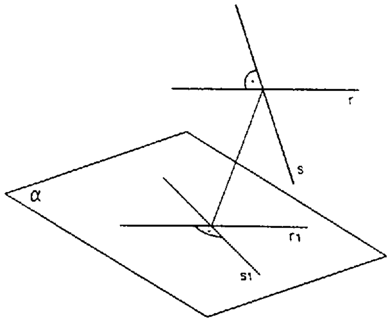
3. Trazar, por un punto **A** exterior a una recta, un plano β que sea paralelo a la recta. (Infinitas soluciones.)

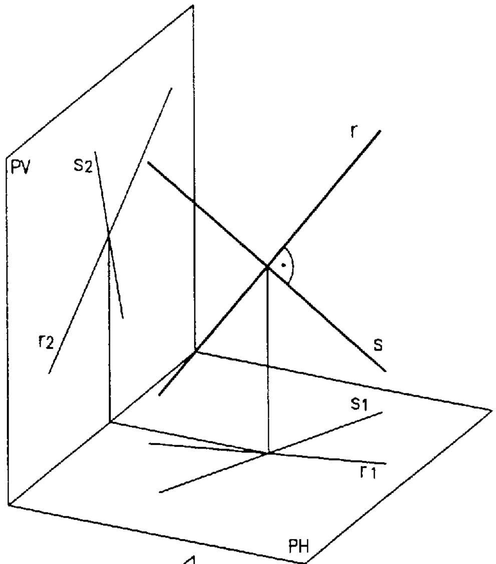
Resolución: Cualquier plano que contenga la recta **t** paralela a **r** es una solución para nuestro problema. Podemos tomar, por ejemplo, el plano β definido por **t** y **s**.



9.1. Teorema de las tres perpendiculares

Teorema de las tres perpendiculares: Si dos rectas son perpendiculares en el espacio y una de ellas es paralela a un plano, las proyecciones de las dos rectas en este plano son también perpendiculares.

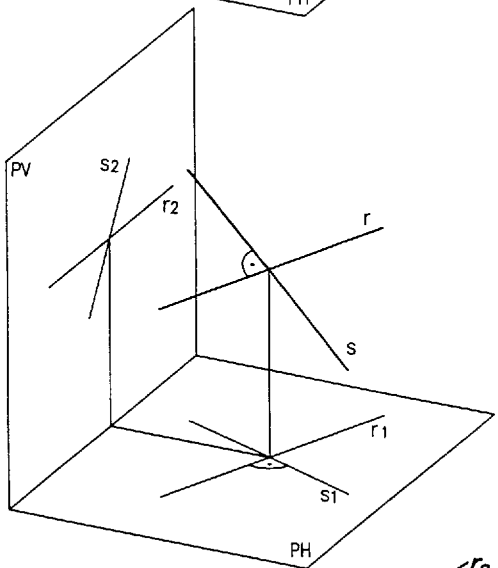




Observemos dos rectas cualesquiera:

Aunque **r** y **s** son perpendiculares, ninguna de ellas es paralela a un plano de proyección.

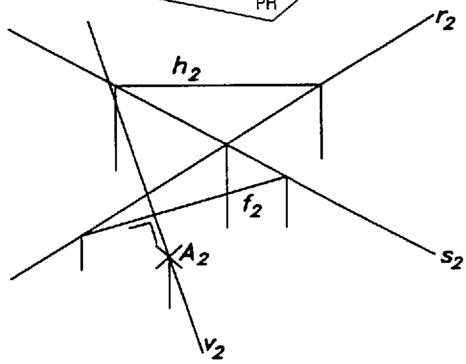
Así pues, con las proyecciones diédricas queda indeterminada su perpendicularidad.



Si **r** y **s** son perpendiculares en el espacio, y **r** es paralela al plano horizontal de proyección, las proyecciones de **r** y **s** sobre el plano horizontal son perpendiculares.

9.2. Perpendicularidad entre recta y plano

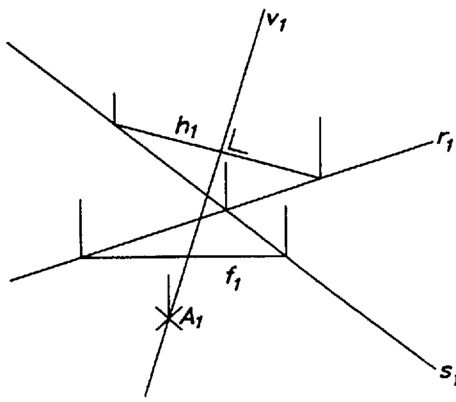
Una recta perpendicular a un plano α es perpendicular a todas las rectas de este plano y, en particular, esta recta **r** será perpendicular a las rectas frontales y horizontales del plano **α**. Así, las proyecciones de la recta **r** deben ser perpendiculares a las trazas homónimas del plano con los planos de proyección. Observamos que esto es consecuencia del teorema de las tres perpendiculares.



Problemas tipo:

1) Trazar, por un punto **A** dado, una recta **v** perpendicular a un plano α definido por las rectas **r** y **s**.

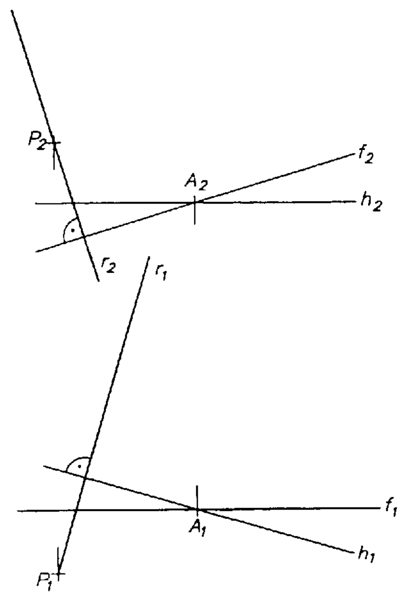
Resolución: Buscamos una recta horizontal **h** y una recta frontal **f** del plano α y aplicamos el teorema de las tres perpendiculares para obtener $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$.



2) Trazar un plano perpendicular a una recta **r** por un punto dado.

Observación: El punto **P** define la dirección de la correspondencia entre proyecciones vertical y horizontal.

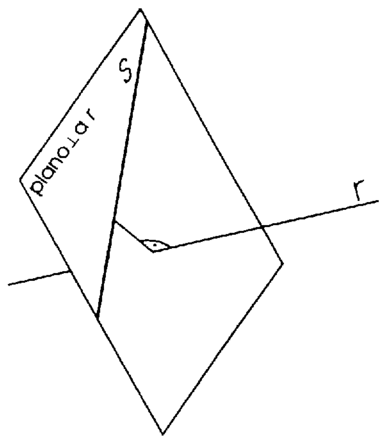
Resolución: Trazamos por el punto dado una recta frontal y otra horizontal del plano que buscamos.



9.3. Perpendicularidad entre rectas

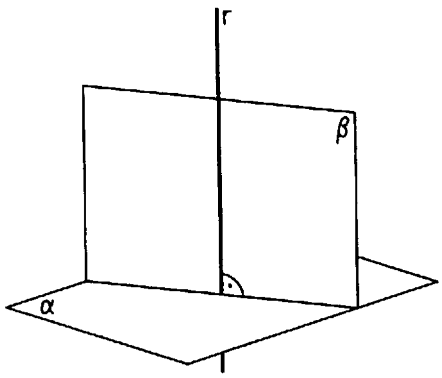
Decimos que dos rectas son perpendiculares entre sí cuando una de ellas pertenece a un plano perpendicular a la otra recta. Así pues, dos rectas perpendiculares no tienen porqué cortarse en un punto.

Dos rectas perpendiculares en el espacio sólo las veremos proyectadas como perpendiculares cuando, como mínimo, una de ellas sea paralela al plano de proyección (recuérdese el teorema de las tres perpendiculares). Así pues, las proyecciones de rectas perpendiculares entre sí no tienen porqué ser perpendiculares.



9.4. Perpendicularidad entre planos

Dos planos son perpendiculares entre sí cuando uno de ellos contiene, como mínimo, una recta perpendicular al otro plano. Las trazas homónimas de planos perpendiculares entre sí no tienen porqué ser perpendiculares.



10. CAMBIOS DE PLANO DE PROYECCIÓN

10.1. Introducción a las técnicas del sistema diédrico

En el sistema diédrico, a menudo conviene colocar los elementos en una posición favorable que nos simplifique el problema que debemos resolver o que nos permita visualizar el elemento (punto, recta, plano, cuerpo...) en una posición diferente de la inicialmente dada.

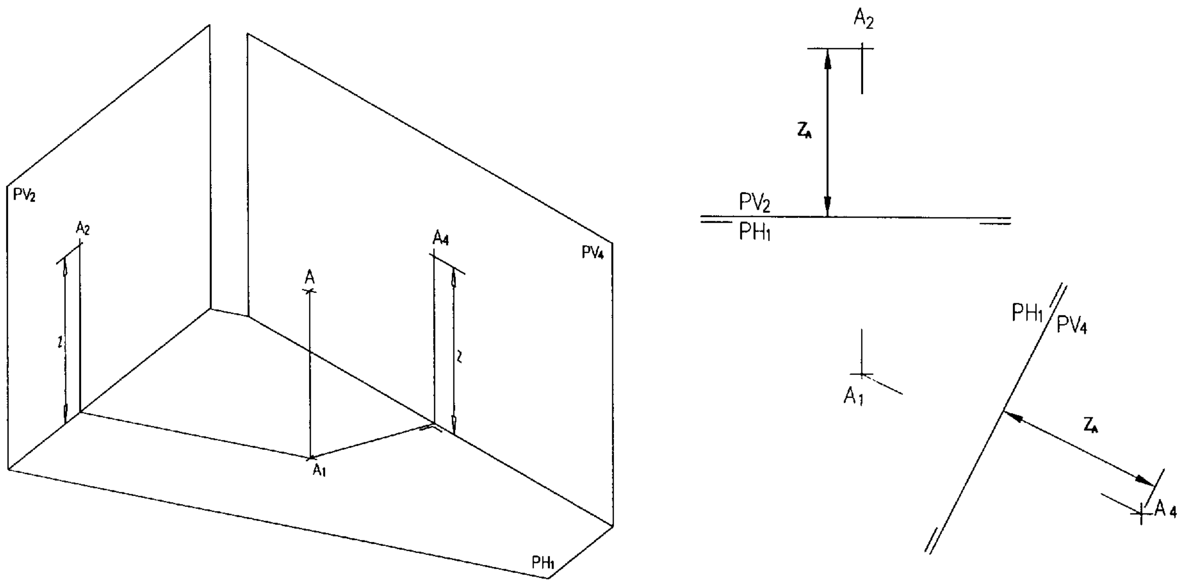
Mediante la técnica del **giro** podemos modificar la posición del elemento en el espacio, moviéndolo. Cuando el elemento es un plano, podemos modificar su posición mediante la técnica del **abatimiento**, que nos permite ver cómodamente la verdadera magnitud de una forma plana.

Hay una tercera técnica, el **cambio de plano de proyección**, con la cual se mantiene la posición espacial del elemento. En el cambio de plano sustituimos **uno** de los dos planos principales de proyección por un tercer plano de proyección. Este tercer plano de proyección es perpendicular al plano que no ha sido sustituido, y el objeto a representar sigue proyectándose ortogonalmente en este nuevo plano.

Los dos planos de proyección no se pueden sustituir simultáneamente, pero podemos repetir escalonadamente el cambio de plano tantas veces como sea necesario.

10.2. Cambio de plano vertical

A modo de ilustración del funcionamiento práctico del cambio de plano, tomamos un punto **A** del espacio, dado por sus proyecciones diédricas principales $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$. Después de proyectar el punto **A** en un nuevo plano vertical, la nueva proyección vertical del punto **A** será $\mathbf{A_4}$. La proyección horizontal $\mathbf{A_1}$ será la inicial, y la cota **z** o distancia del plano horizontal también se mantendrá.

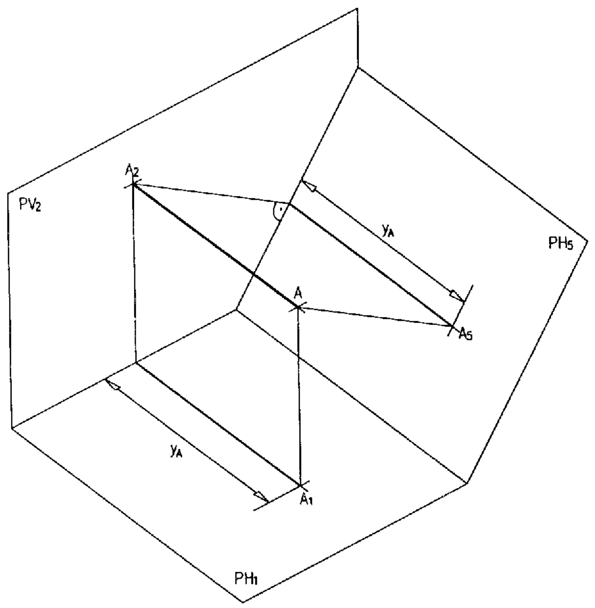


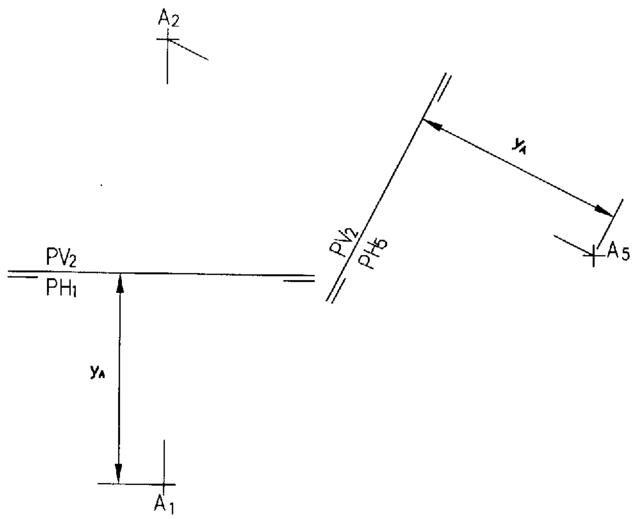
10.3. Cambio de plano horizontal

Si tomamos el mismo punto **A**, de proyecciones principales $\mathbf{A_1}$ y $\mathbf{A_2}$, y lo proyectamos ahora en un nuevo plano horizontal, obtendremos una nueva proyección horizontal $\mathbf{A_5}$. En este caso se conserva la proyección vertical $\mathbf{A_2}$, y la distancia al plano vertical (alejamiento **y**) también se mantiene.

En el cambio de plano horizontal habremos sustituido la proyección horizontal $\mathbf{A_1}$ por una proyección horizontal $\mathbf{A_5}$. Los dos planos $\mathbf{PH_5}$ y $\mathbf{PV_2}$ siguen formando un diedro en ángulo recto.

En este caso, como en el anterior, al haber realizado el cambio de plano de un solo punto, hemos creído necesario indicar la posición concreta de los planos de proyección mediante una línea de tierra. Más adelante suprimiremos esta línea de tierra y trabajaremos utilizando coordenadas relativas.

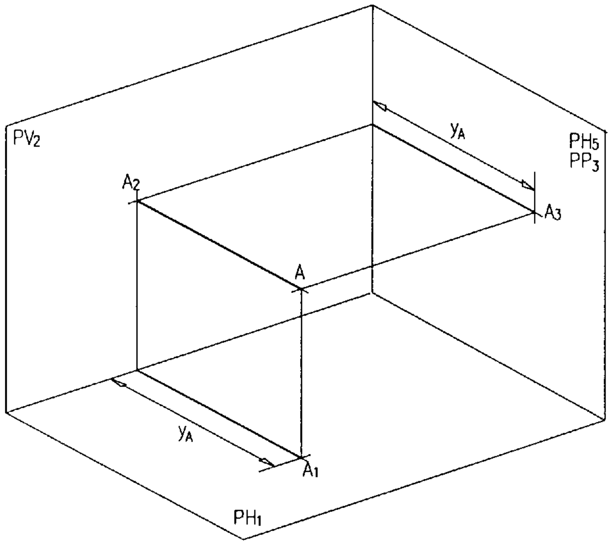


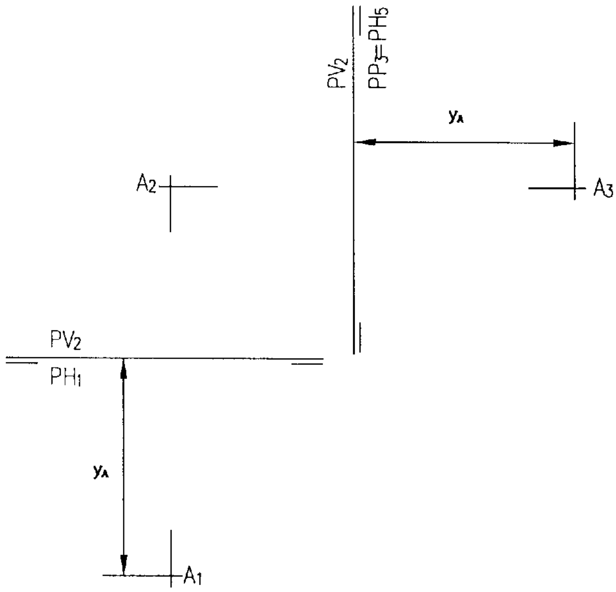


10.4. Convenio de notación para el cambio de plano

Recordemos que las proyecciones principales horizontal y vertical tenían, hasta este momento, los subíndices $_1$ y $_2$ respectivamente.

El subíndice $_3$ lo reservamos para las proyecciones en un plano de perfil. Observamos que hacer una proyección en un plano de perfil es equivalente a realizar un cambio de plano horizontal: hemos sustituido la proyección horizontal por una de perfil y mantenido la proyección vertical principal. Los alejamientos relativos (distancias al plano vertical principal de proyección) se podían ver en la proyección vertical, y ahora estos mismos alejamientos se pueden observar en la proyección de perfil.





Tendremos un nuevo subíndice para cada nuevo plano de proyección sobre el que proyectamos. Reservaremos subíndices **impares** para las proyecciones en planos horizontales y subíndices **pares** para las proyecciones en planos verticales.

Con este convenio de notación, para que exista correspondencia entre las proyecciones sobre dos planos de proyección será necesario que uno de estos planos tenga subíndice impar y el otro subíndice par (planos horizontal y vertical, respectivamente).

Cabe observar que el hecho de asignar a los planos principales los nombres de horizontal y vertical es arbitrario y, de hecho, podríamos haber convenido lo contrario: lo importante es que estos dos planos de proyección que determinan el sistema sean **perpendiculares** entre sí, que se proyecte el objeto a representar **ortogonalmente** sobre cada uno de estos dos planos y que «liguemos» las dos proyecciones con la correspondencia del sistema diédrico. Al utilizar la técnica del cambio de plano, cada vez que introducimos un nuevo plano de proyección deben seguir manteniéndose estas condiciones entre el plano que no ha sido sustituido y el nuevo plano: los dos planos deben constituir un sistema diédrico.

La técnica del giro consiste en modificar la posición del elemento geométrico considerado, haciéndolo girar un ángulo determinado y en un sentido dado alrededor de una recta que denominaremos **eje de giro** o simplemente **eje**.

A pesar de que el eje de giro puede ser una recta cualquiera, situada en cualquier posición respecto a los planos de proyección, consideraremos solamente el caso particular del giro alrededor de un eje situado en la posición favorable **perpendicular** a uno de los planos de proyección. En otras posiciones más generales del eje, la técnica del giro puede resultar bastante más complicada. Por lo tanto, si tenemos que hacer el giro alrededor de un eje que no esté situado en la citada posición, recomendamos la obtención previa de esta posición, por ejemplo proyectando en planos auxiliares (cambios de plano de proyección).

Más adelante trataremos, en un capítulo aparte, la técnica del **abatimiento**, que es un caso particular de giro: en el abatimiento se gira un plano alrededor de una recta particular de este plano.

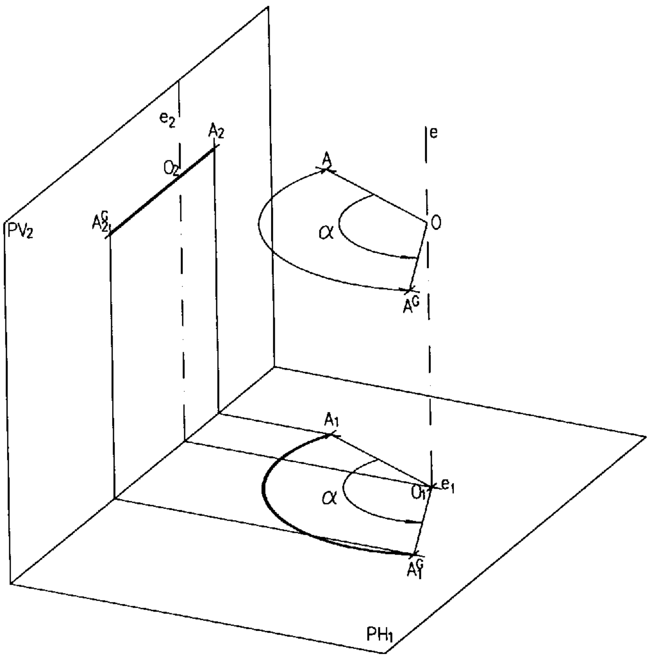
11.1. Giro de un punto

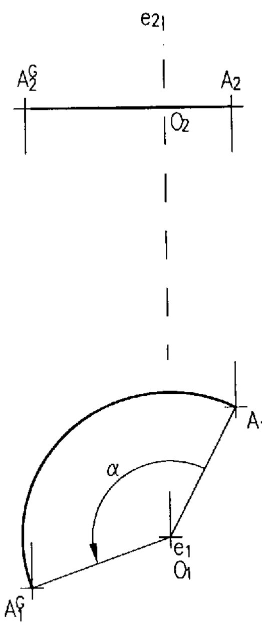
Cuando un punto gira alrededor de un eje de giro, describe un arco de circunferencia contenido en un plano perpendicular al eje, con el centro del arco contenido en el eje. Si el eje es perpendicular a un plano de proyección, el arco de circunferencia estará contenido en un plano paralelo a este plano de proyección y, por lo tanto, se proyectará en verdadera magnitud.

Eje perpendicular al plano horizontal de proyección

Sea el eje de giro **e** ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$) una recta perpendicular al plano horizontal de proyección y un punto **A** ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$). Si el punto **A** gira un determinado ángulo en el sentido indicado alrededor del eje **e**, la nueva situación espacial del punto **A** vendrá dada por $\mathbf{A^G}$ ($\mathbf{A_1^G}$, $\mathbf{A_2^G}$).

Observamos las proyecciones de la trayectoria circular del punto **A**: el arco de circunferencia se proyecta en verdadera magnitud en el plano horizontal de proyección, y también el ángulo girado. En la proyección vertical podemos observar que la cota del punto **A** se ha mantenido

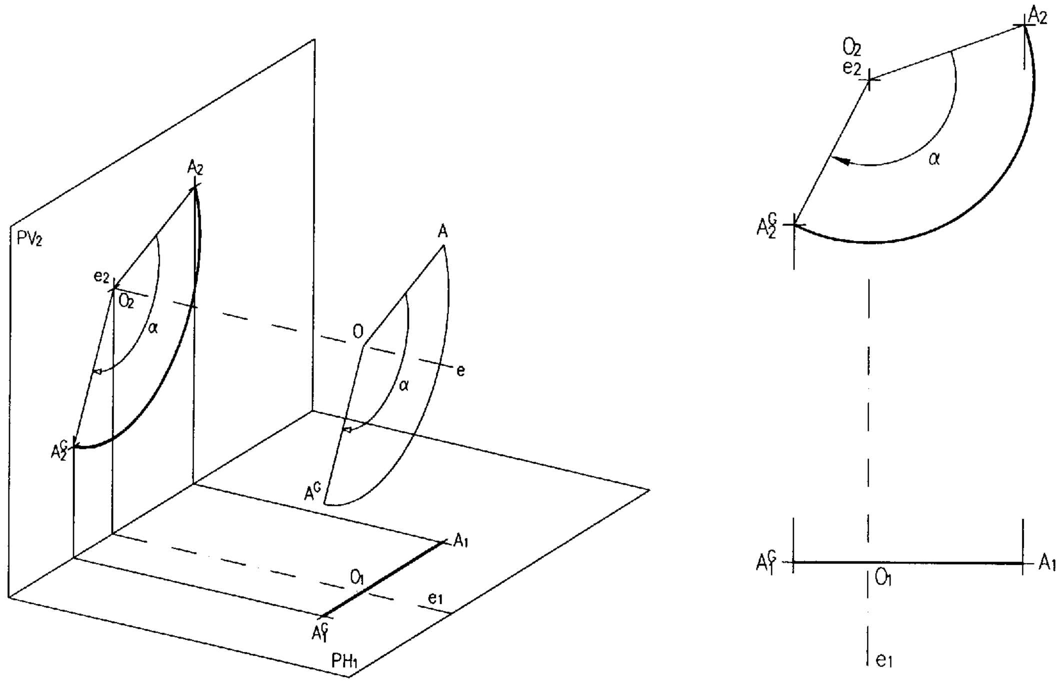




Eje perpendicular al plano vertical de proyección

Sea el eje de giro **$e(e_1, e_2)$** una recta perpendicular al plano vertical de proyección y un punto **$A(A_1, A_2)$**. Si el punto **A** gira un determinado ángulo en el sentido indicado alrededor del eje **e**, la nueva situación espacial del punto **A** vendrá dada por **$A^G(A_1^G, A_2^G)$**.

Observamos las proyecciones de la trayectoria circular del punto **A**: el arco de circunferencia se proyecta en verdadera magnitud en el plano vertical de proyección, y también el ángulo girado. En la proyección horizontal podemos observar que el alejamiento del punto **A** se ha mantenido.



11.2. Giro de una recta

Cuando una recta gira alrededor de un eje, todos los puntos de la recta giran alrededor de este eje un mismo ángulo y en el mismo sentido. Por lo tanto, para determinar las nuevas proyecciones de la recta será suficiente girar dos puntos de la recta y unirlos.

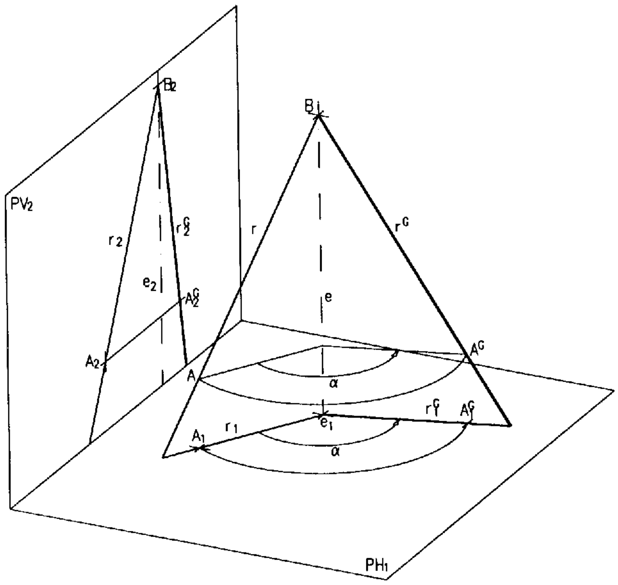
Es necesario observar que, cuando se gira una recta alrededor de un eje perpendicular a uno de los planos de proyección, la recta sigue formando, después del giro, el **mismo ángulo** con este plano de proyección (o con otro paralelo al plano), pero el ángulo de la recta con cualquier otro plano se modifica.

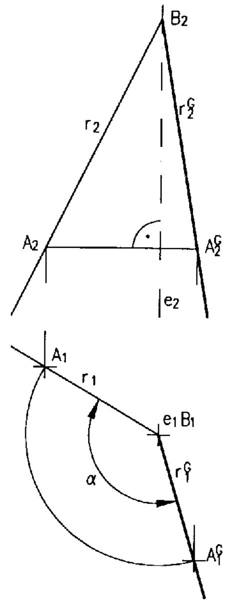
Giro de un recta que corta al eje de giro

Cualquier punto del eje de giro está situado en la misma posición antes y después del giro.

Cuando el eje de giro **e(e_1, e_2)** corta a la recta **r(r_1, r_2)** en un **punto B(B_1, B_2)**, para realizar el giro de la recta será necesario girar un único punto **A(A_1, A_2)** de la recta **r** que no pertenezca al eje de giro.

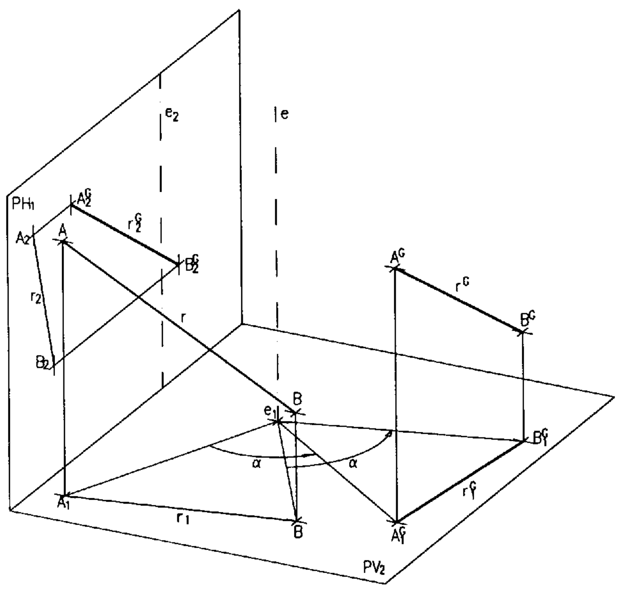
En este caso, para ilustrarlo, se ha escogido un eje **e** perpendicular al plano horizontal de proyección. Debería resultar sencillo al lector resolver el giro si el eje fuera perpendicular al plano vertical de proyección.

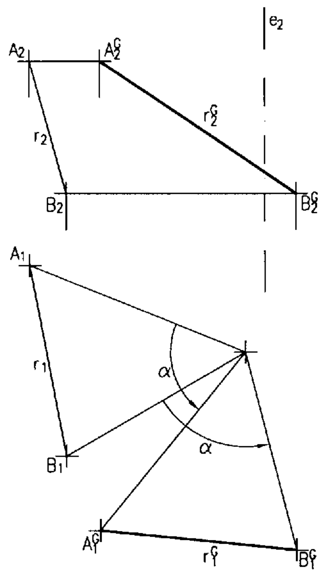




Giro de una recta que se cruza con el eje de giro

Dadas las proyecciones principales del eje de giro **e(e_1, e_2)** y de una recta **r(r_1, r_2)** cualquiera que no se corten, para girar la recta un ángulo en el sentido indicado se efectuará el giro de dos puntos cualesquiera de la recta: se han elegido los puntos **A(A_1, A_2)** y **B(B_1,B_2)**.

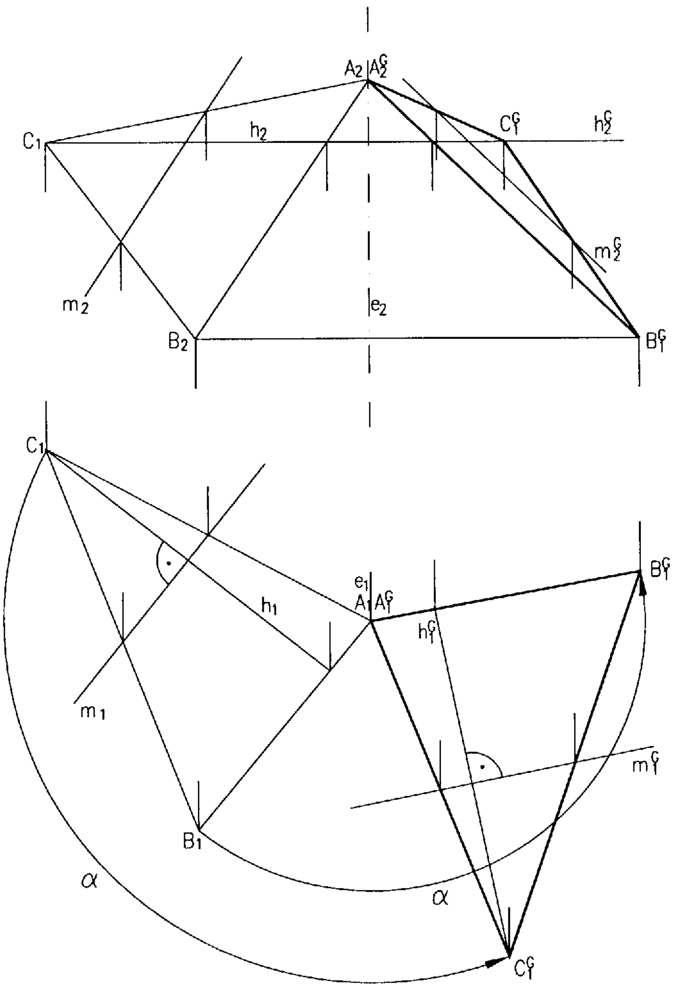




11.3. Giro de un plano

Si un plano gira un ángulo α alrededor de un eje, todos los puntos del plano giran alrededor de este eje el mismo ángulo α y en el mismo sentido. Por lo tanto, para girar un plano será suficiente girar los elementos que nos definen este plano.

Para ilustrar este apartado se ha elegido un plano definido por tres puntos, **A, B** y **C**, de los cuales se dan las proyecciones diédricas. Se ha efectuado un giro de un ángulo α en el sentido indicado, alrededor de un eje **e** perpendicular al plano horizontal de proyección y con el punto **A** contenido en el eje: de esta manera será suficiente con el giro de los puntos **B** y **C**.



Aprovechando el ejemplo del giro alrededor del eje vertical, podemos observar lo siguiente:

- El ángulo que forma el plano **ABC** con el plano horizontal de proyección es el mismo antes y después del giro.

- Todas las rectas del plano **ABC** forman el mismo ángulo con el plano horizontal de proyección antes y después del giro. Por lo tanto, las rectas horizontales del plano, después de girarlas, seguirán siendo rectas horizontales del plano girado, y las rectas de máxima pendiente, después de girarlas, seguirán siendo rectas de máxima pendiente del plano girado.

- El plano **ABC** forma con el plano vertical de proyección un ángulo diferente antes y después del giro.

- Las rectas frontales y las de máxima inclinación del plano **ABC** giradas *no* serán las frontales y de máxima inclinación del plano después del giro.

Para finalizar con este ejemplo, es necesario observar que si hubiéramos definido el plano **ABC** por una recta de máxima pendiente, podríamos haber elegir un eje vertical que la cortase y habríamos podido efectuar el giro del plano de manera muy simplificada girando un único punto de esta recta de máxima pendiente.

En el caso de efectuar el giro del plano alrededor de un eje perpendicular al plano vertical de proyección, se mantendrían los ángulos del plano y de las rectas del plano con el plano vertical de proyección. Si giramos las rectas frontales y de máxima inclinación del plano, coincidirán con las rectas frontales y de máxima inclinación del plano girado.

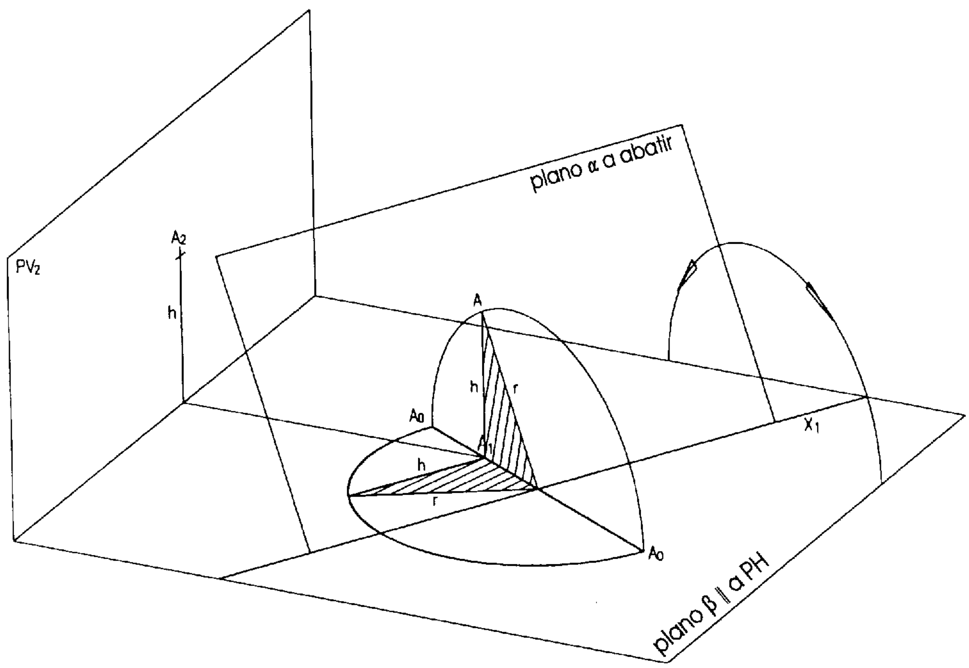
En el capítulo de los giros ya se ha avanzado que la técnica del **abatimiento** es un caso particular del giro: abatir un plano consiste en girar el plano alrededor de una recta particular de este plano, denominada **bisagra** o **charnela** del abatimiento, hasta que el plano coincida con un plano paralelo a uno de los de proyección. Mediante el abatimiento logramos determinar la verdadera magnitud de formas planas contenidas en el plano abatido. La charnela será siempre una recta del plano a abatir, paralela a uno de los planos de proyección.

12.1. Abatimiento de un punto contenido en un plano. Notación

Supongamos dado un plano α que queremos abatir.
Tomamos un plano auxiliar β, que coincide con uno de los planos de proyección o es paralelo a éste.
Sea **x** la recta de intersección entre los planos α y β.
La recta **x** será utilizada como charnela del abatimiento.
Sea un punto **A** contenido en el plano.

En el abatimiento, el punto **A** gira describiendo un arco de circunferencia contenido en un plano perpendicular a la charnela. La intersección del arco de circunferencia con el plano β sobre el que abatimos nos dará el punto $\mathbf{A_0}$, que denominaremos punto **A** abatido. Observamos que hay dos posibles puntos $\mathbf{A_0}$, según si realizamos el abatimiento en un sentido u otro.

La metodología del abatimiento en el sistema diédrico consiste en aprovechar el hecho de que si la charnela es paralela a un plano de proyección, el plano que contiene la trayectoria circular del punto a abatir será proyectante en este mismo plano de proyección, ya que es perpendicular a la charnela. Con la sencilla resolución de un triángulo rectángulo, podemos encontrar cómodamente la posición del punto abatido.

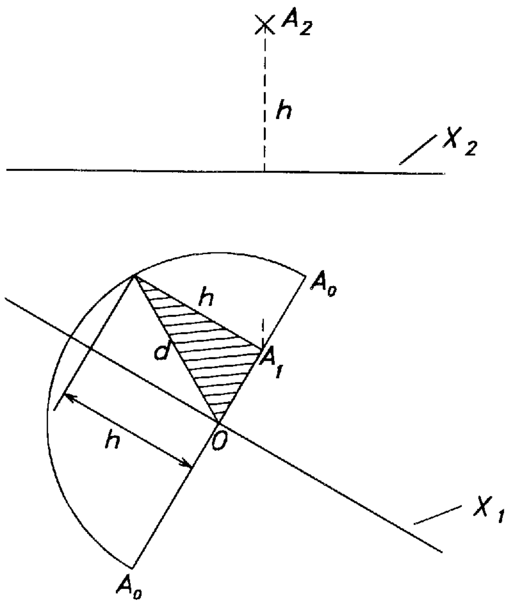


Abatimiento de un punto A sobre un plano horizontal

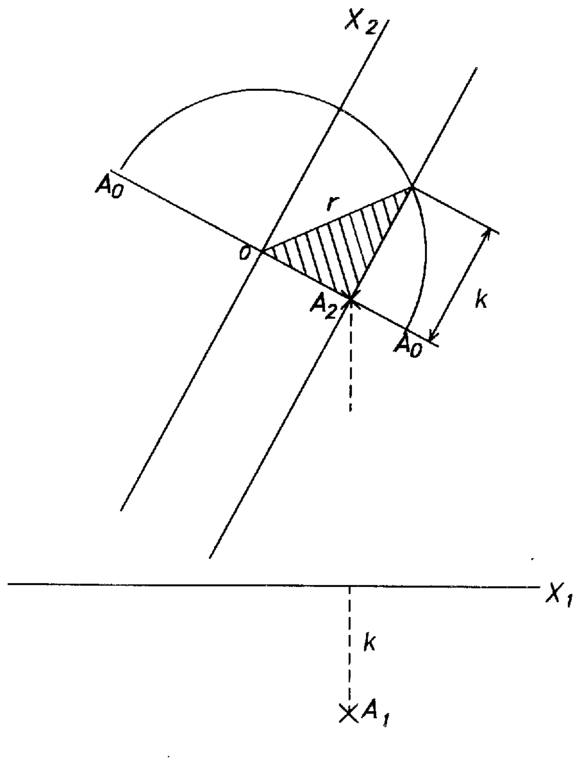
- **A (A_1, A_2)** es el punto a abatir, contenido en un plano.
- **x (x_1, x_2)** es la charnela del abatimiento, contenida también en el plano.
- La charnela horizontal puede ser cualquier recta horizontal del plano.
- **h** es la distancia entre el punto **A** a abatir y el plano **β** horizontal sobre el que abatimos.
- **d** es la distancia real entre el punto **A** y la charnela **x**, encontrada por triangulación.
- **A_0** es el punto **A** abatido sobre el plano **β** horizontal.
- Observamos que tenemos dos soluciones para **A_0**, según hacia qué lado abatamos.

Abatimiento de un punto A sobre un plano frontal

- **A (A_1, A_2)** es el punto a abatir, contenido en un plano.
- **x (x_1, x_2)** es la charnela del abatimiento, contenida también en el plano.
- La charnela frontal puede ser cualquier recta frontal del plano.
- **k** es la distancia entre el punto **A** a abatir y el plano **β** frontal sobre el que abatimos.
- **d** es la distancia real entre el punto **A** y la charnela **x**, encontrada por triangulación.
- **A_0** es el punto **A** abatido sobre el plano frontal.
- Observamos que tenemos dos soluciones para **A_0**, según hacia qué lado abatamos.



Abatimiento sobre un plano horizontal



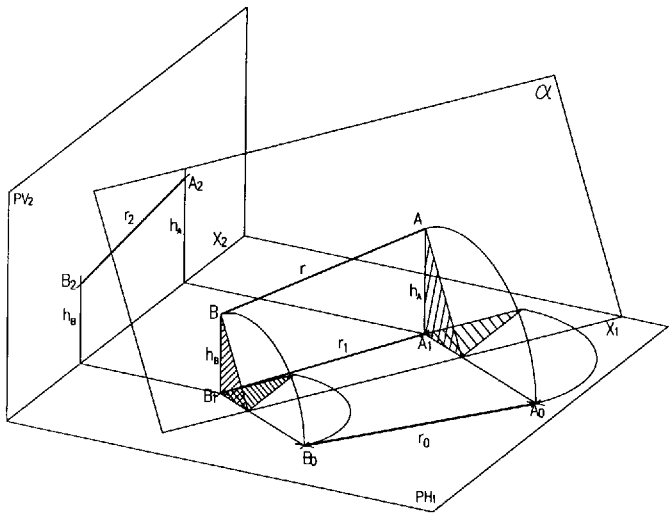
Abatimiento sobre un plano frontal

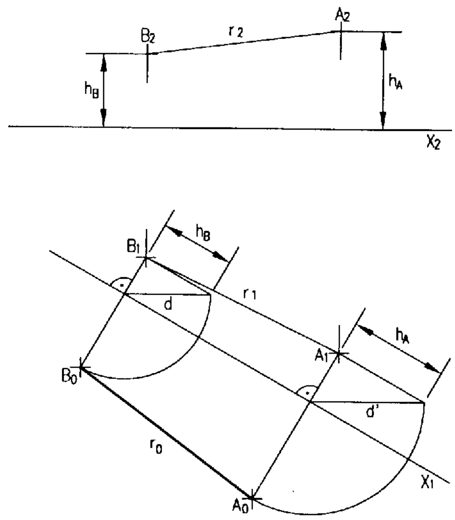
También podríamos realizar el abatimiento en un plano de perfil. En este caso, la charnela utilizada sería una recta de perfil del plano **α** a abatir.

12.2 Abatimiento de rectas contenidas en un plano

Podemos abatir una recta **r(r$_1$,r$_2$)** contenida en un plano **α** abatiendo dos puntos **A y B** de esta recta. En la figura puede observarse cómo se ha tomado una charnela horizontal **x(x$_1$, x$_2$)**, perteneciente al mismo plano.

La recta abatida **r$_0$** la hemos hallado uniendo los dos puntos abatidos **A$_0$** y **B$_0$**.





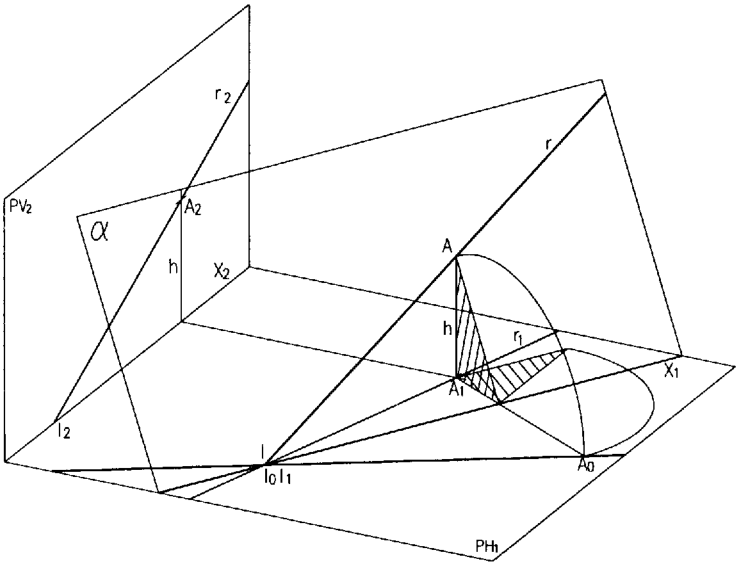
Seguidamente podemos observar un par de posiciones particulares de recta en las cuales el abatimiento es aún más sencillo.

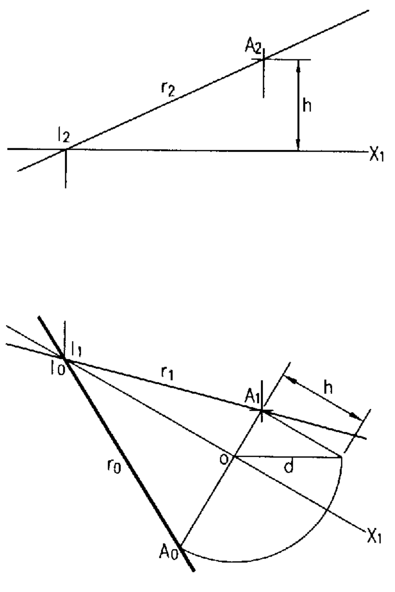
Abatimiento de una recta que corta la charnela dentro de los límites del papel

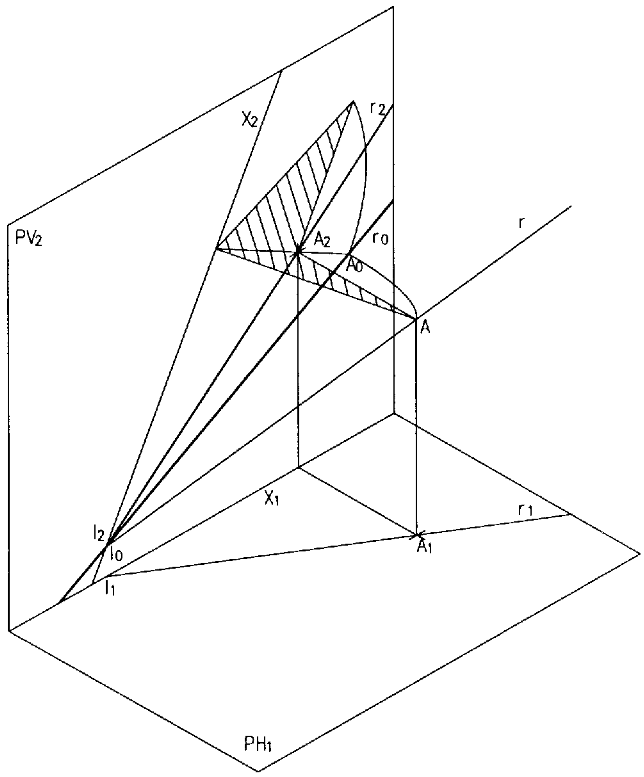
Los puntos del plano que pertenecen a la charnela **x** los denominamos **puntos dobles**, por el hecho que sus proyecciones coinciden antes y después del abatimiento.

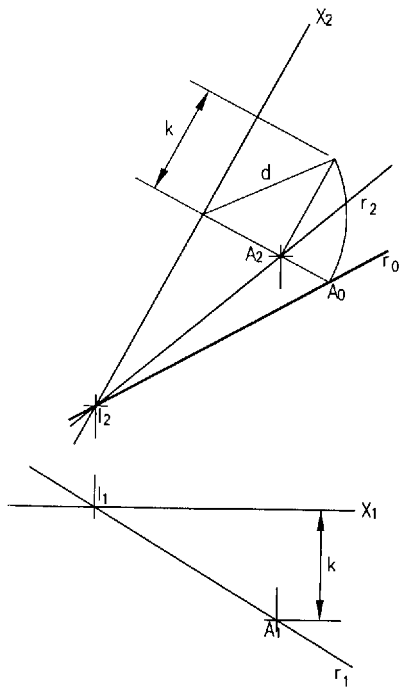
Si la recta **r(r$_1$, r$_2$)** a abatir corta la charnela **x(x$_2$, x$_1$)** en un punto **I(I$_1$, I$_2$)**, este punto **I** será doble y, por lo tanto, simplemente abatiendo un punto **A(A$_1$, A$_2$)** de la recta podremos dibujar la recta **r$_0$** abatida.

Los dos ejemplos siguientes sirven para ilustrarlo. En el primer caso, se ha utilizado una charnela horizontal para realizar el abatimiento, y en el segundo caso, una charnela frontal.





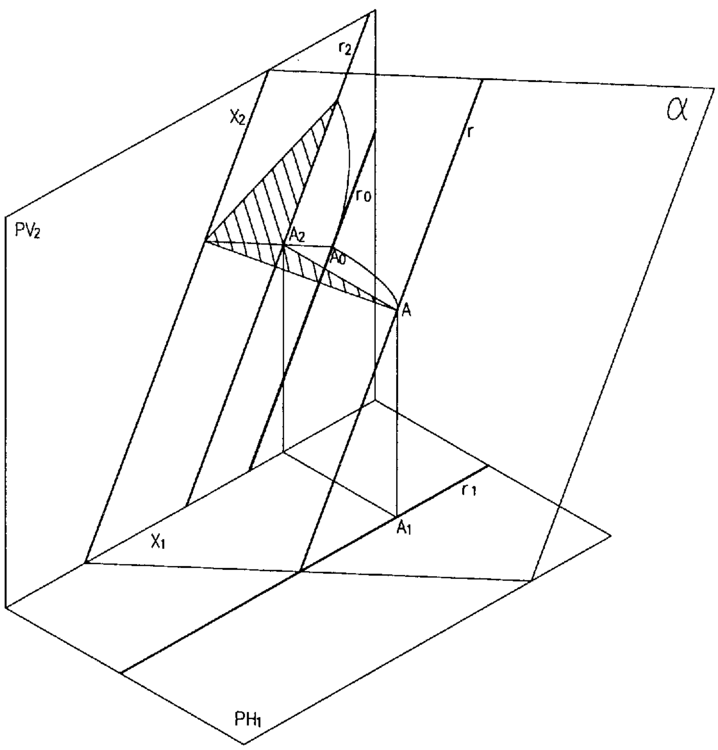


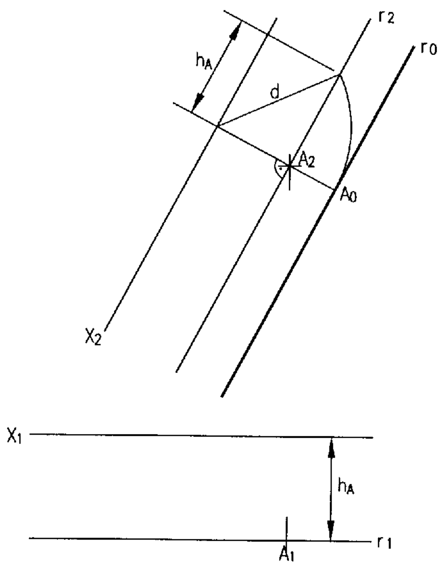


Abatimiento de una recta paralela a la charnela

Si la recta **r** a abatir es paralela a la charnela **x** del abatimiento, la recta abatida $\mathbf{r_0}$ también será paralela. Será suficiente abatir un punto **A** cualquiera de la recta para encontrar la recta abatida.

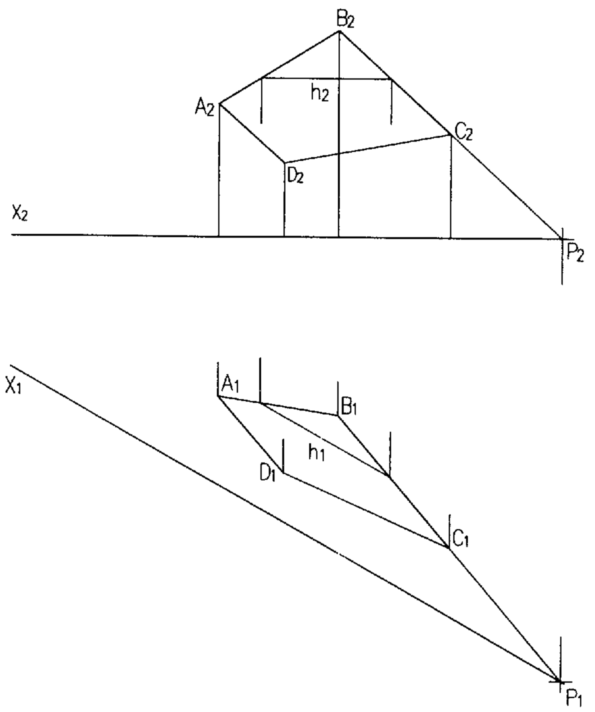
En la figura siguiente se ha abatido la recta frontal **r** utilizando como charnela una recta **x** frontal del plano, paralela a **r**.





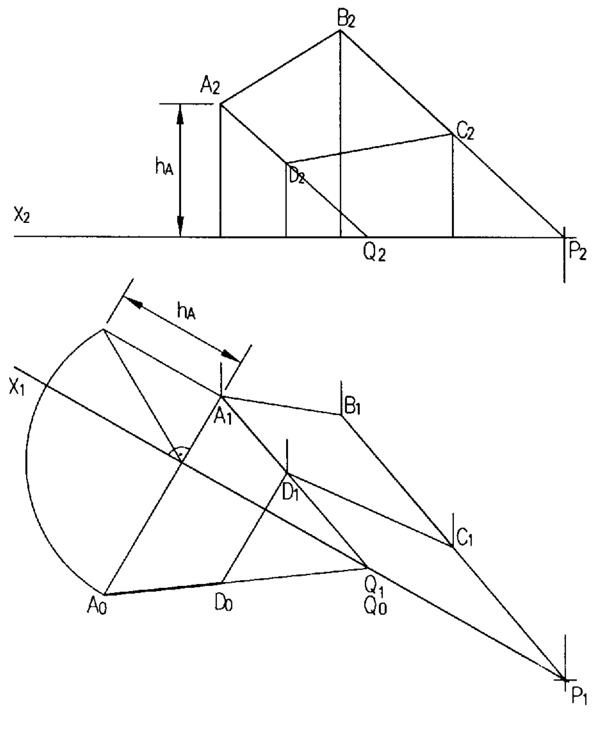
12.3. Abatimiento de figuras planas. Desabatimiento

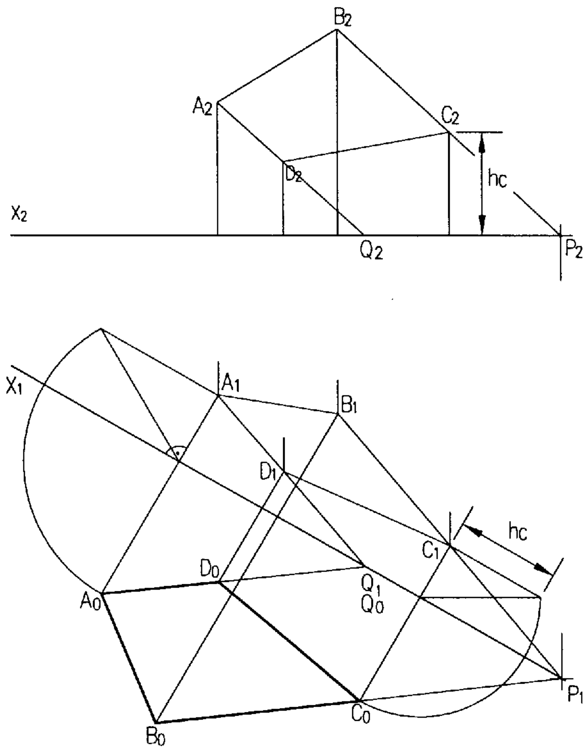
Para ilustrar el abatimiento de figuras planas, proponemos y resolvemos un pequeño ejercicio. Supongamos dadas las proyecciones diédricas principales de una figura plana: un cuadrilátero de vértices **ABCD**. Se nos pide obtener la verdadera magnitud de esta figura plana con el uso de abatimientos.



Antes de empezar es necesario decidir si queremos realizar el abatimiento en un plano horizontal o en un plano frontal. Decidimos realizar el abatimiento en un plano **β** horizontal: es necesario elegir una charnela adecuada. Hemos tomado una recta horizontal **h** del plano **α** definido por **ABCD**. A pesar de que podemos utilizar la recta **h** como charnela, hemos preferido una recta horizontal **x** exterior al cuadrilátero, con el fin de lograr un dibujo más limpio y evitar la superposición del cuadrilátero abatido con una proyección horizontal del cuadrilátero. Nos hemos asegurado que la recta **x** pertenezca al plano haciéndola pasar por el punto **P** de la recta definida por **BC**.

Después de abatir el punto **A,** con el punto **Q** hemos encontrado fácilmente el segmento $\mathbf{A_0D_0}$, ya que $\mathbf{D_0D_1}$ es perpendicular a la charnela. De forma análoga se han encontrado los puntos $\mathbf{B_0}$ y $\mathbf{C_0}$, que completan el cuadrilátero abatido.





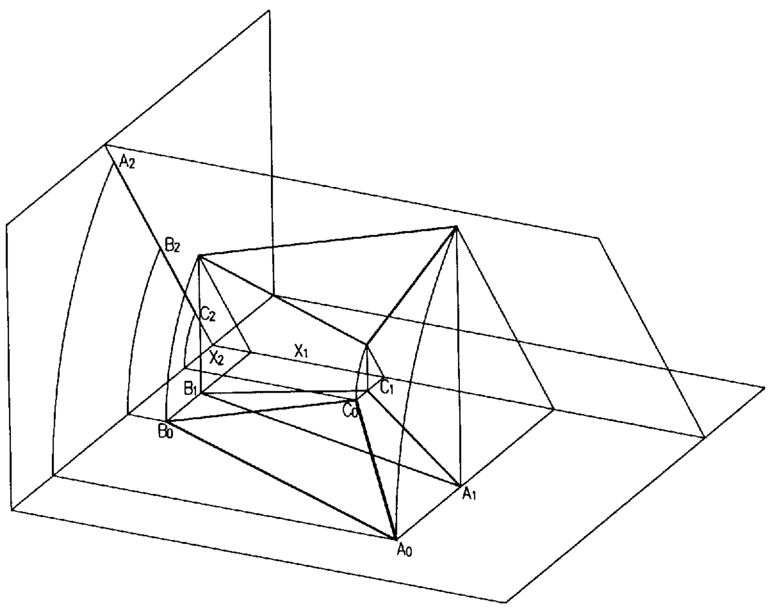
Si observamos la figura podemos llegar a la conclusión de que en el abatimiento de una forma plana hay una relación de afinidad entre la proyección de una forma plana en un plano de proyección y el abatimiento de esta forma sobre este mismo plano de proyección. El eje de afinidad es la charnela, la dirección de afinidad es la perpendicular a la charnela y la razón de afinidad viene dada por la que se establece al abatir uno de los puntos de la forma plana.

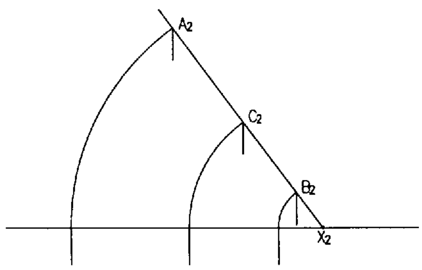
Desabatimiento

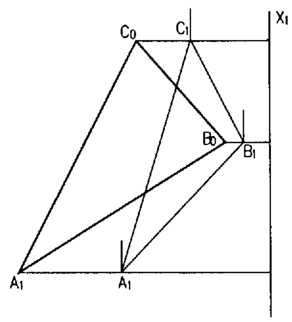
A menudo se puede plantear el problema inverso al abatimiento, o sea, que, dada la verdadera magnitud de una forma plana y su posición respecto de una charnela concreta, sea necesario determinar las proyecciones diédricas, si sabemos que está contenida en un plano conocido. Es el proceso inverso al abatimiento y lo denominamos desabatimiento.

12.4. Caso particular: abatimiento de un plano proyectante

En el caso de tener que abatir un plano proyectante, la charnela paralela a uno de los planos de proyección será perpendicular a otro plano de proyección. De este modo, también podría realizarse el abatimiento como si fuera un giro alrededor de un eje de punta.







12.5. Aplicación: proyecciones diédricas de la circunferencia

En el caso del dibujo de la circunferencia en el sistema diédrico, tendremos en cuenta que:

- La proyección de una circunferencia sobre un plano de proyección, si se utiliza el tipo de proyección cilíndrica (ortogonal o oblicua) es siempre una elipse (que, en casos muy particulares, puede degenerar en segmento o en circunferencia).

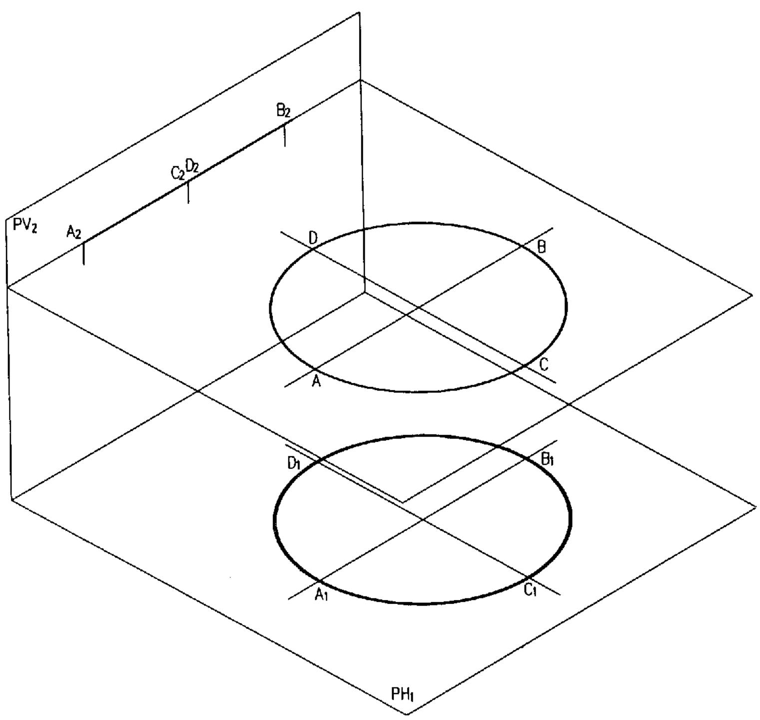
-La proyección de dos diámetros perpendiculares de la circunferencia son dos diámetros conjugados de la elipse que resulta de la proyección de la circunferencia.

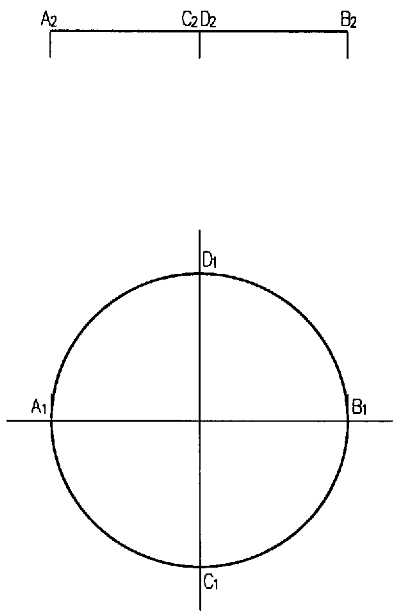
- El mayor de los dos ejes principales de la elipse será siempre la proyección horizontal de una recta horizontal, o bien la proyección vertical de una recta frontal, según se trate de la proyección horizontal o vertical de la circunferencia, respectivamente. Habitualmente, dibujaremos la elipse a partir de los diámetros principales, contenidos en los ejes principales.

Veremos las proyecciones de una circunferencia en tres **posiciones particulares**: en un plano paralelo a un plano de proyección, en un plano perpendicular a un plano de proyección y en una plano oblicuo respecto a los planos de proyección.

Circunferencia situada paralela a un plano de proyección

En la figura se ha representado una circunferencia contenida en un plano horizontal. En proyección vertical se verá como un segmento y en proyección horizontal se verá la circunferencia en verdadera magnitud. Se han representado las proyecciones de dos diámetros perpendiculares entre sí: uno paralelo al plano vertical **(AB)**, y otro perpendicular **(CD)**.

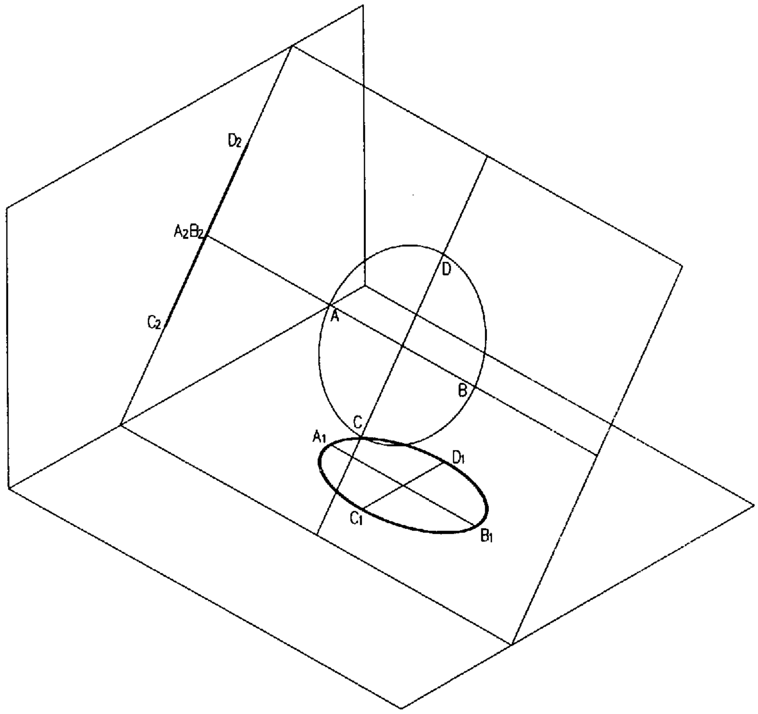


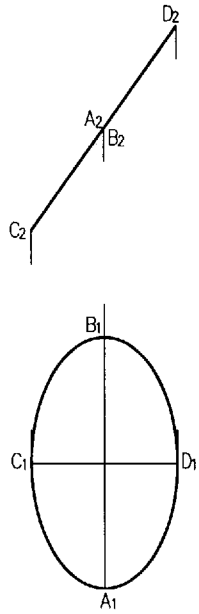


Circunferencia situada en un plano perpendicular a uno de los planos de proyección

Se ha elegido una circunferencia situada en un plano de canto. El diámetro **AB** es perpendicular al plano vertical de proyección y se proyecta en verdadera magnitud **(A_1B_1)** en el plano horizontal. El diámetro **CD**, perpendicular a **AB**, se proyecta en verdadera magnitud **(C_2D_2)** en el plano vertical de proyección, ya que es frontal.

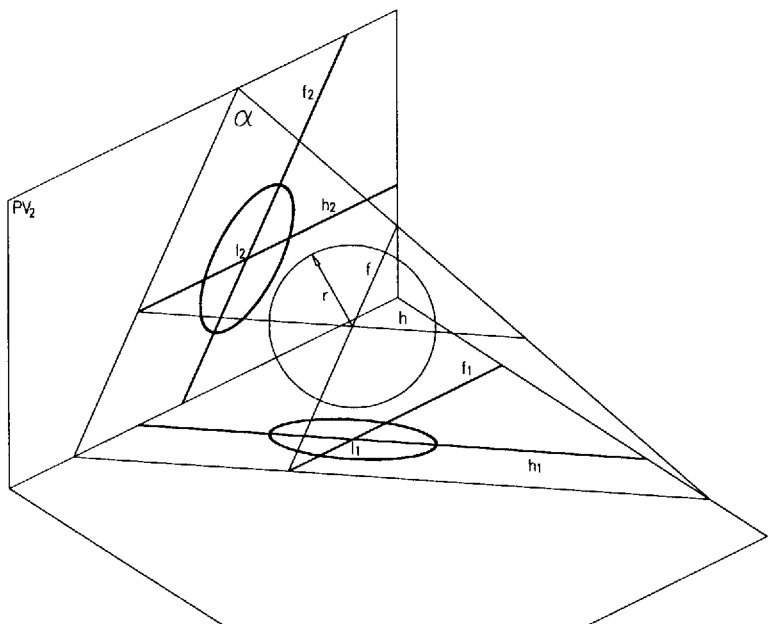
La proyección vertical de la circunferencia es un segmento y la proyección horizontal es una elipse que tiene como diámetros principales, mayor y menor, respectivamente, **A_1B_1** y **C_1D_1**.





Circunferencia situada en un plano oblicuo: caso general

Para ilustrar este caso, proponemos y resolvemos un problema:



DATOS:

Las proyecciones diédricas principales de una recta horizontal **$h(h_1,h_2)$** y de otra frontal **$f(f_1,f_2)$**, que se cortan en el punto **$I(I_1,I_2)$** y que nos definen un plano **α**.

SE PIDE:

Encontrar las proyecciones diédricas principales de una circunferencia de centro **I** y radio **R**, contenida en el plano **α**.

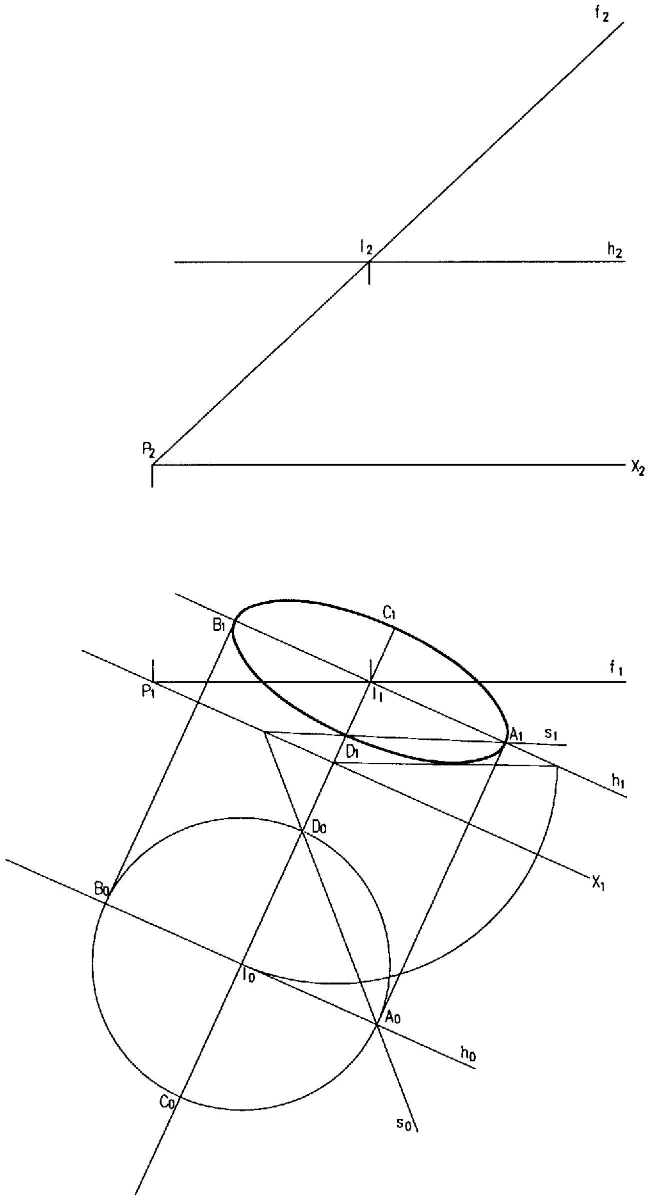
RESOLUCIÓN:

Hay diversas formas de resolver el problema planteado, pero proponemos aplicar la técnica del abatimiento que nos permite obtener la verdadera magnitud de la circunferencia.

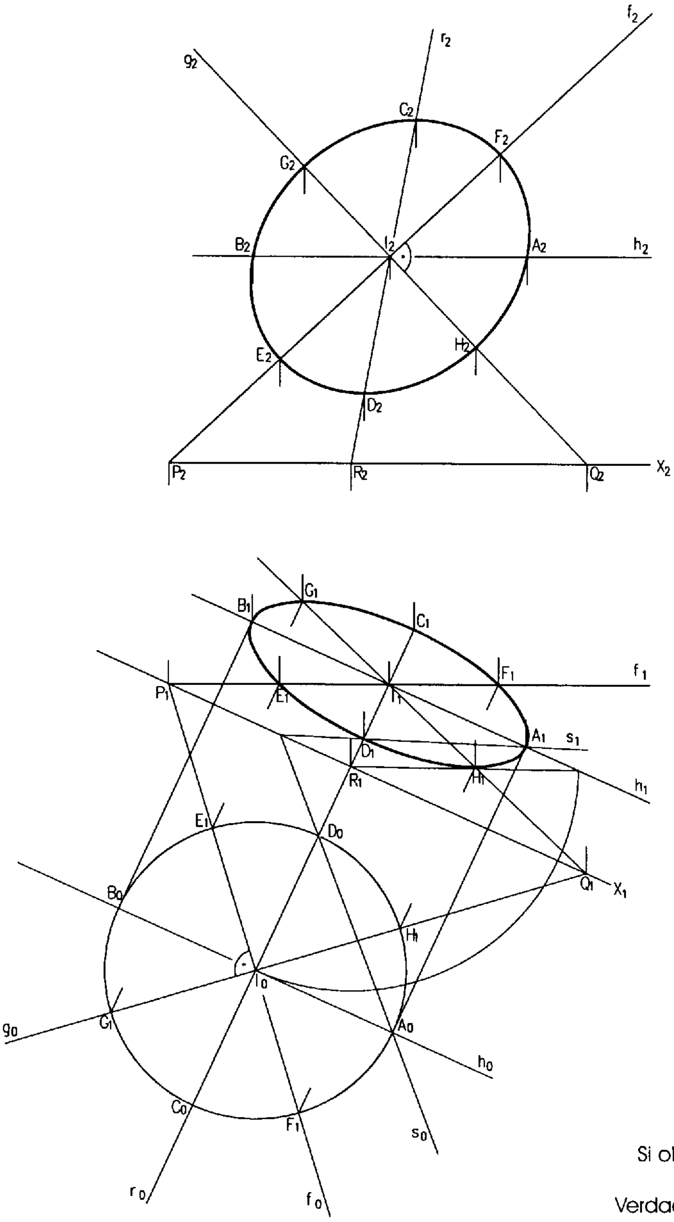
De hecho, lo que nosotros conocemos es la verdadera magnitud de la circunferencia, y queremos conocer sus proyecciones diédricas. Se trata, por lo tanto, de un problema típico de **desabatimiento**.

Elegimos una charnela para el abatimiento. Podríamos elegir la recta **f** o la recta **h** dadas, pero hemos optado por una recta auxiliar horizontal **x** del plano, suficientemente alejada de la recta **h** para que así no exista intersección de la charnela **x** con la figura abatida, en este caso la circunferencia que se nos pide. Para garantizar que la recta **x** sea del plano α, se la ha hecho pasar por el punto **P** del plano.

Encontramos el punto $\mathbf{I_0}$ abatido y dibujamos la circunferencia en verdadera magnitud. El diámetro **AB** se ha pasado a la proyección horizontal de la recta **h**: $\mathbf{A_1B_1}$ sigue observándose en verdadera magnitud. El diámetro **CD** se ha podido encontrar desabatiendo la recta auxiliar **s**. Las proyecciones horizontales de los segmentos **AB** y **CD** nos han permitido dibujar la elipse de diámetros principales $\mathbf{A_1B_1}$ y $\mathbf{C_1D_1}$, que es la proyección horizontal de la circunferencia que se nos pide.



El método elegido para dibujar la proyección vertical de la circunferencia nos ha permitido utilizar el abatimiento ya hecho en un plano horizontal: los diámetros principales $\mathbf{E_2F_2}$ y $\mathbf{G_2H_2}$ de la elipse se han encontrado al desabatir la recta **f** y la recta **g**, que son perpendiculares. Los puntos **E, F, G** y **H** de la circunferencia se han ido pasando desde el plano abatido a la proyección horizontal, y después a la proyección vertical. Es necesario observar que la magnitud $\mathbf{E_2F_2}$ debe ser idéntica a la $\mathbf{A_1B_1}$, y ambas iguales al diámetro real de la circunferencia.



Si observamos la figura, podemos comprobar que:

Verdadera magnitud del diámetro de la circunferencia:
$A_1B_1 = E_2F_2 = A_0B_0 = C_0D_0 = E_0F_0 = G_0H_0$
Diámetros principales de las elipses:
proyección vertical: E_2F_2 y G_2H_2
proyección horizontal: A_1B_1 y C_1D_1
Diámetros conjugados de las elipses:
proyección vertical: A_2B_2 y C_2D_2
proyección horizontal: E_1F_1 y G_1H_1

Si el plano α no fuera dado por las rectas horizontal y frontal, sería necesario encontrar las direcciones de estas rectas, ya que los diámetros mayores de las elipses que son proyección de la circunferencia son paralelos a los planos de proyección.

En el ejemplo siguiente se da un plano α mediante las proyecciones diédricas de dos rectas, **t** y **u**, y se nos pide encontrar las proyecciones diédricas de una circunferencia de radio conocido **R** contenida en el plano α, de la cual sabemos que está centrada en el punto **I** de intersección entre **t** y **u**.

Después de elegir una charnela **x** paralela a uno de los planos de proyección y contenida en el plano α a abatir, la resolución es idéntica a la del caso anterior.